Cours d'Analyse
Semestre 1

Stéphane Attal

Contents

Chapter 1

Les nombres réels

1.1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, i.e. l'ensembles des fractions

$$\frac{a}{b},$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Pour chacun de ces ensembles, l'ajout de $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$.
$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des rationnels positifs.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble déjà bien fourni de nombres. Par exemple, entre deux rationnels $q < p$ quelconques il y a une infinité de rationnels. En effet $p' = (p+q)/2$ est rationnel encore et vérifie $q < p' < p$. Ainsi de suite on peut en construire une infinité entre q et p.

Avec cette remarque, on voit qu'aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de "suivant" dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on regarde l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{Q}\,;\ p > q\}$$

alors $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

Une autre façon de dire la même chose : dans n'importe quel intervalle (rationnel) autour d'un rationnel q il y a une infinité de rationnels.

Et pourtant les rationnels sont loins d'être suffisants, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel. C'est un résultat qui avait déjà été remarqué en Grèce antique. Démontrons-le. Si $\sqrt{2}$ est un rationnel a/b, que l'on peut toujours supposer être sous forme réduite, i.e. sans diviseur commun. On a

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi a^2 est pair, ce qui implique que a est pair (le carré d'un impair est impair). Donc $a = 2k$, ce qui donne $b^2 = 2k^2$ et b est pair aussi. Ce qui contredit l'hypothèse initiale de primalité entre a et b. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est d'ailleurs le cas de toutes les racines carrées qui ne sont pas des entiers (non démontré ici, exercice pour les plus motivés).

Une autre façon de dire la même chose est de considérer l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{q \in \mathbb{Q}\, ;\ q^2 < 2\}\,.$$

C'est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, il est borné à droite (par exemple par 3/2), mais pourtant il n'a pas de plus grand élément. Montrons le. En effet, si $q \in \mathcal{B}$, alors de deux choses l'une, soit q est plus petit que 1 auquel cas il est facile de trouver un élément dans $\mathcal{B}$ qui soit plus grand (par exemple 5/4), soit q est plus grand que 1. Dans ce cas, posons

$$\varepsilon = \frac{2 - q^2}{3q}\,.$$

Alors ε est rationnel, positif et plus petit que q. Calculons $(q+\varepsilon)^2$, on trouve

$$q^2 + 2\varepsilon q + \varepsilon^2$$

qui est strictement plus petit que

$$q^2 + 3q\varepsilon\,,$$

c'est à dire que 2. Donc à tout élément de $\mathcal{B}$ on sait associer un élément plus grand, toujours dans $\mathcal{B}$. Il n'y a pas de plus grand élément dans $\mathcal{B}$.

C'est ce genre de “trous” dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ que l'on cherche à combler avec l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1.2 Ensembles ordonnés

On dit qu'un ensemble X est *ordonné* s'il est muni d'une relation $\leq$, entre éléments de X qui satisfait

i) $x \leq x$, pour tout $x \in X$,
ii) si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
iii) si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
Ensuite on utilise des notations évidentes comme
$x \geq y$ pour $y \leq x$
$x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$
etc.
Par exemple $\mathbb{Q}$ avec la relation usuelle $\leq$ est un ensemble ordonné. Mais aussi l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E, muni de l'inclusion d'ensemble $\subset$ est un ensemble ordonné aussi.

On dit qu'un ensemble ordonné X est muni d'un *ordre total* si tous les éléments de X sont comparables :

"pour tout $x, y \in X$ on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$."

C'est le cas pour $(\mathbb{Q}, \leq)$, mais ce n'est pas le cas pour $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Soit X un ensemble ordonné et $A \subset X$ une partie de X. Un *majorant* de A est un élément $m \in X$ tel que $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un majorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné supérieurement*, ou que A est *majoré*. De même un *minorant* de A est un élément $n \in X$ tel que $a \geq n$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un minorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné inférieurement*, ou que A est *minoré*.

On dit que A admet un élément *maximal* s'il admet un majorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_0 \in A$ tel que $a \leq a_0$ pour tout $a \in A$. Un tel a_0 est forcement unique (exercice), on le note $\max A$. De même on dit que A admet un élément *minimal* s'il admet un minorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_1 \in A$ tel que $a \geq a_1$ pour tout $a \in A$. Un tel a_1 est forcement unique (exercice), on le note $\min A$.

Enfin, on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, s'il existe. De même, on note $\inf A$ le plus grand des minorants de A, s'il existe. Notez que $\sup A$ est encore un majorant de A et que $\inf A$ est encore un minorant de A. Notez que $\sup A$ n'a aucune raison d'être un élément de A, si c'est le cas on a forcement $\sup A = \max A$ (exercice).

Voyons quelques exemples, dans le cas $X = \mathbb{Q}$.

Dans le cas $A =]-1, 1]$. Cet ensemble est majoré et minoré. On a $\max A = 1$, pas de min, on a $\sup A = 1$ et $\inf A = -1$.

Dans le cas $A = [2, +\infty[$. Cet ensemble est minoré, mais pas majoré. On a pas de max, mais $\min A = 2$, on a pas de sup et $\inf A = 2$.

Pour le cas $A = \{q \in \mathbb{Q}\,;\ q^2 < 2\}$, cet ensemble est majoré mais pas minoré. Il n'a pas de max, pas de min, pas de sup, pas de inf.

1.3 Le corps des nombres réels

Théorème 1.3.1 (Fondamental) *Il existe un corps $\mathbb{R}$ totalement ordonné, qui contient $\mathbb{Q}$ et qui a la propriété que toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*

Rappelons que par *corps* on entend que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication . internes telles que :

• l'addition est commutative, associative, d'élément neutre 0 et inversible :

$$\begin{aligned}
&a+b=b+a\\
&a+(b+c)=(a+b)+c\\
&a+0=a\\
&\forall a\in\mathbb{R},\exists -a\in\mathbb{R}\,;\ a+(-a)=0\,,
\end{aligned}$$

• la multiplication est commutative, associative, d'élément neutre 1, inversible (sauf pour 0) :

$$\begin{aligned}
&ab=ba\\
&a(bc)=(ab)c\\
&1.a=a\\
&\forall a\in\mathbb{R}^*,\exists a^{-1}\in\mathbb{R}^*\,;\ a.(a^{-1})=1\,,
\end{aligned}$$

• la multiplication est distributive sur l'addition :

$$a(b+c)=ab+ac\,.$$

La construction de $\mathbb{R}$ et la preuve du théorème est extrèmement longue, nous ne la ferons pas. L'essentiel est de retenir que dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet un sup. On en déduit facilement que toute partie non vide minorée admet un inf (exercice). Ce n'était pas le cas de $\mathbb{Q}$, comme on l'a vu dans l'exemple 3. Dans $\mathbb{R}$ on a par exemple, si

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x^2<2\}$$

alors $\sup A = \sqrt{2}$.

C'est une propriété assez forte en fait, elle dit en gros que pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, si on a une "accumulation" des points de A alors la "limite" de ces points est encore dans $\mathbb{R}$. On pourra dire les choses plus précisément quand on parlera de suites de Cauchy, mais pour le moment on reste vague comme ça.

Revenons à notre ensemble $rA = \{q \in \mathbb{Q}_+ ;\ q^2 < 2\}$. C'est facile de voir que les points de A s'accumulent à droite : on peut fabriquer facilement une suite d'éléments (u_n) de $\mathcal{A}$ tels que $u_n - u_m$ tend vers 0, quand n et m tendent vers $+\infty$, pourtant il n'y a pas d'élément limite dans $\mathbb{Q}$ au bout. En fait la construction de $\mathbb{R}$ consiste en gros à rajouter tous ces éléments limites qui manquent à $\mathbb{Q}$.

1.4 Densité de $\mathbb{Q}$

Cette propriété d'existence du sup dans $\mathbb{R}$ a beaucoup de conséquences très importantes.

Théorème 1.4.1 ($\mathbb{R}$ est archimédien) *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Démonstration Soit $A = \{nx ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Si la propriété ci-dessus n'était pas vraie alors y serait un majorant de A. Donc A admettrait un sup dans $\mathbb{R}$, noté α.

On a $\alpha - x < \alpha$, donc $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mx > \alpha - x$. D'où

$$(m+1)x > \alpha\,.$$

Ce qui contredit que $\alpha = \sup A$. $\square$

Théorème 1.4.2 (Densité de $\mathbb{Q}$) *Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Démonstration On a $y - x > 0$, donc par le Théorème 1.4.1 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n(y - x) > 1\,.$$

De même, par le même théorème, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$-m_2 < nx < m_1$$

(n est fixé, on cherche m_1 tel que $m_1 \times 1 > nx$, on fait de même avec $-nx$). On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$m - 1 \leq nx < m\,,$$

en effet, on regarde $m = m_1 - 1$, si $nx < m$ on recommence, par contre si $m \leq x$ alors on a gagné.

Ainsi, on a

$$nx < m \leq nx + 1 < ny$$

d'où

$$x < \frac{m}{n} < y\,.$$

$\square$

Théorème 1.4.3 (Caractérisation du sup**)** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide, majoré. Le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est le sup de A si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que*

$$\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha\,. \tag{1.1}$$

Démonstration Soit $\alpha = \sup A$. On a donc $\alpha \geq a$ pour tout $a \in A$. Soit $\varepsilon > 0$, si on a $\alpha - \varepsilon \geq a$ pour tout $a \in A$ on aurait que $\alpha - \varepsilon$ est un majorant de A, ce qui contredirait que α est le sup de A. Donc il existe un $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a$.

Inversement si (1.1) est vérifié, alors α est un majorant de A. Si $\alpha' < \alpha$ est un majorant de A, alors en prenant $\varepsilon = (\alpha - \alpha')/2$, on sait qu'il existe $a \in A$ tel que $a > \alpha - \varepsilon > \alpha'$. Ce qui contredit que α' est un majorant. Ainsi α est le plus petit des majorants. $\square$

Une façon simple de comprendre ce résultat est que :

– soit $\sup A$ est un élément de A (c'est donc $\max A$),

– soit il est "au bord de A" et les points de A s'accumulent près de $\sup A$.

1.5 Racines n-ièmes

Théorème 1.5.1 (Racine n-ièmes) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, tel que*

$$y^n = x\,. \tag{1.2}$$

Démonstration Tout d'abord l'unicité. Si $y_1 \neq y_2$ (par exemple $y_1 < y_2$), on a $y_1^n \neq y_2^n$, (i.e. $y_1^n < y_2^n$). Donc on ne peut pas avoir $y_1^n = y_2^n = x$.

Maintenant l'existence. Soit

$$B = \{r \in \mathbb{R}\,;\ r > 0, r^n < x\}\,.$$

Si $x < 1$ alors comme $1^n = 1$, on a que 1 est un majorant de B. Si $x \geq 1$ alors $x^n \geq x$ et donc x est un majorant de B. Dans tous les cas on a montré que B est majoré.

Il est aussi vrai que B est non vide, car

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \leq \frac{x}{x+1} < x\,.$$

Donc B admet un sup, notons le y.

Si on a $y^n < x$, on choisit $h \in]0,1[$ tel que

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, y^{n-k}\, h^k \\
&= y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, y^{n-k}\, h^{k-1} \\
&\leq y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \\
&= y^n + h((1+y)^n - y^n) \\
&< x\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $y + h$ est aussi un élément de B et y n'est pas un majorant de B.

Si $y^n > x$, soit $k \in]0,1[$, $k < y$ et

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(y-k)^n &= y^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\, y^{n-j}\, (-k)^j \\
&= y^n - k \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} (-k)^{j-1} \\
&\geq y^n - k \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} \\
&= y^n - k((1+y)^n - y^n) \\
&> x\,.
\end{aligned}$$

Si $r \in B$ alors $r^n < x < (y-k)^n$, en particulier $r^n < (y-k)^n$ et donc $r < y-k$. Donc cela montre que $y-k$ est un majorant de B, ce qui contredit le fait que y est le plus petit.

Il ne reste donc plus que $y^n = x$ comme possibilité. $\square$

Ce nombre y qui vérifie $y^n = x$ est la *racine n-ième* de x. On le note

$$y = x^{1/n}\,.$$

1.6 Valeurs absolues, parties entières

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Remarquez que dans tous les cas on a

$$x \leq |x| \qquad \text{et} \qquad -x \leq |x|\ .$$

Lemme 1.6.1 *On a*

$$|x| \leq M$$

si et seulement si

$$-M \leq x \leq M\,.$$

Démonstration Si $|x| \leq M$ alors $M \geq 0$ et

$$\begin{cases} x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x \leq M & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -M \leq x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -M \leq x \leq M & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Inversement, si $-M \leq x \leq M$ alors $M \geq 0$ mais aussi $-M \leq -x \leq M$. D'où $|x| \leq M$ dans tous les cas. $\square$

Une autre forme qui apparaît souvent est la suivante.

Lemme 1.6.2 *On a*

$$|x-a| \leq \varepsilon$$

si et seulement si

$$a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon\,.$$

La démonstration est laissée en exercice.

Proposition 1.6.3 (Inégalité triangulaire) *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \ .$$

Démonstration On a $|a + b| = a+b$ ou $-a-b$, qui sont tous deux $\leq |a|+|b|$. Ce qui prouve la première inégalité.

Ensuite, supposons que $|a| \geq |b|$ (sinon, on échange les rôles). Alors

$$||a| - |b|| = |a| - |b| = |a + b - b| - |b| \leq |a + b| + |b| - |b| = |a + b| \ .$$

□

Rappelons au passage quelques notations utiles :

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} \, .$$

Tous deux sont positifs et on a

$$\begin{cases} x = x^+ - x^- \ , \\ |x| = x^+ - x^- \ . \end{cases}$$

Nous finissons par un petit rappel sur les *parties entières*.

Théorème 1.6.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$n \leq x < n + 1 \, .$$

Ce n est noté $E[x]$, la partie entière *de x.*

Démonstration L'existence a déjà été démontrée au cours de la démonstration du Théorème 1.4.2, ou en tout cas sous une forme un peu différente qui s'adapte facilement ici.

Montrons l'unicité. Si $m \leq x < m + 1$ aussi alors, ou bien $n < m$ auquel cas on a $n + 1 \leq m$ et donc $n + 1 \leq x$, ce qui est impossible ; ou bien $n > m$ et on fait le même raisonnement ; ou bien $n = m$. □

1.7 Questions de cours

Voici les points de ce chapitre qu'il faut connaître absolument.

– Définition d'un ensemble ordonné, d'un ensemble majoré, minoré, d'un max, d'un min, d'un sup, d'un inf. Unicité du max, min, sup, inf avec démonstration.

– Connaître les implications évidentes et celles qui sont fausses : un max est forcément un sup mais pas le contraire, etc . Avec à chaque fois, soit la démonstration, soit un contre-exemple.

– Propriété fondamentale des réels : tout sous-ensemble non vide majoré admet un sup. Idem pour l'inf.

– $\mathbb{R}$ est archimédien.

– Entre deux réels il y a toujours un rationnel.

– Première caractérisation du sup.

– Formule du binôme de Newton

– Existence et unicité d'une racine n-ième dans $\mathbb{R}_+$.

– Valeur absolue, propriétés des valeurs absolues, inégalités.

– Définition de la partie entière.

Chapter 2

Les suites

2.1 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est basé sur la propriété suivante. Soit $S \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble qui vérifie :

• $0 \in S$

• si $n \in S$ alors $n+1 \in S$.

Dans ce cas forcement $S = \mathbb{N}$.

Cette propriété ne se démontre pas, c'est en fait une définition axiomatique de $\mathbb{N}$: "l'ensemble $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant 0 et qui a la propriété de contenir tous les "suivants" de ses éléments."

Comment cela s'applique t'il au raisonnement par récurrence ? On considère une propriété $P(n)$ qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre pour cela que $P(0)$ est vraie et que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie aussi. Soit S l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(n)$ est vraie. Alors S contient 0 et contient les suivants de tous ses éléments. Donc $S = \mathbb{N}$. Ce qui veut dire que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voyons un exemple. Montrez que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}\,. \tag{$P(n)$}$$

Pour $n = 0$ on a $(x+y)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0\, y^0 = 1\,.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Maintenant si $P(n)$ est vraie, alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

et donc

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^{k+1}\, y^{n-k} + x^k\, y^{n-k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^j\, y^{n+1-j} \left(\binom{n}{j} \mathbb{1}_{j\leq n} + \binom{n}{j-1}\mathbb{1}_{j\geq 1}\right) .\end{aligned}$$

Si $j=0$ on a

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{j} .$$

Si $j=n+1$ on a

$$\binom{n}{j-1} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{j} .$$

Enfin, si $0<j<n+1$ alors

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{j!(n)j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\\ &= \frac{n!(n-j+1)+n!j}{j!(n-j+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{j!(n-j+1)!}\\ &= \binom{n+1}{j} .\end{aligned}$$

Ainsi dans tous les cas on a

$$\binom{n}{j} \mathbb{1}_{j\leq n} + \binom{n}{j-1}\mathbb{1}_{j\geq 1} = \binom{n+1}{j}$$

et donc

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} x^j\, y^{n+1-j} \binom{n+1}{j}$$

et $P(n+1)$ est vraie. Grâce au raisonnement par récurrence on a montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il arrive parfois que $P(n)$ soit indéxée par $n \geq 1$ seulement. La méthode est la même, on démarre à $P(1)$ c'est tout.

2.2 Les suites, suites particulières

Une *suite réelle* est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, on la voit plutôt comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ que comme une fonction $n \mapsto u(n)$.

Une suite peut être définie comme une fonction explicite de n :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) ,$$

ou par récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2 , \\ v_{n+2} &= 3v_{n+1} - 5v_n , \\ &\dots \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques suites particulières.

Les *suites arithmétiques* sont définies par

$$u_{n+1} = u_n + r$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $r \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = u_0 + nr .}$$

En association avec ces suites, notez la formule utile suivante

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .}$$

Les *suites géométriques* sont définies par

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $q \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = q^n\, u_0 .}$$

Avec ces suites géométriques on a les formules bien connues suivantes

$$\boxed{\sum_{k=n_i}^{n_f} q^k = \frac{q^{n_i} - q^{n_f+1}}{1-q} = q^{n_i}\,\frac{1-q^N}{1-q}\,,}$$

où $N = n_f - n_i + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Enfin on a un mix des deux avec les suites

$$u_n = au_n + b$$

qui donnent

$$\boxed{u_n = a^n\, u_0 + b\,\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,.}$$

2.3 Résolution des suites $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Une situation très fréquente est de rencontrer des suites définies par récurrence de la forme

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés et u_0, u_1 sont fixés. Le théorème qui suit donne la forme explicite de u_n dans ce cas.

Théorème 2.3.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixé et soit (u_n) la suite définie par récurrence*

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,, \tag{2.1}$$

*pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère l'*équation caractéristique *de cette suite*

$$r^2 - ar - b = 0\,. \tag{2.2}$$

i) Si l'équation (2.2) admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n}\,,$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.
ii) Si l'équation (2.2) admet une seule solution réelle (double) r_0 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n}\,,$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

iii) Si l'équation (2.2) admet deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, \rho^n\, \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n\, \sin(n\theta)},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

Démonstration Commençons par le cas i). Si r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de (2.2) alors il est facile de vérifier que la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

vérifie la relation (2.1) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\, r_1^n r_1^2 + \mu\, r_2^n r_2^2 \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu\, r_2^n (a r_2 + b) \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= a u_{n+1} + b u_n\,. \end{aligned}$$

Inversement, si (u_n) vérifie (2.1), il existe un unique couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$u_0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = \lambda\, r_1 + \mu\, r_2$$

car $r_1 \neq r_2$. Les suites solutions de (2.1) sont clairement entièrement déterminées par u_0 et u_1. Donc la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

est bien l'unique solution de (2.1) dans ce cas.

Le cas ii) se traite de la même façon : on vérifie que

$$u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n\,,$$

est solution dans ce cas (où l'on a en particulier $a = 2r_0$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\, r_0^{n+2} + \mu\,(n+2)\, r_0^{n+2} \\ &= \lambda\, r_0^n (a r_0 + b) + \mu\, n\, r_0^n (a r_0 + b) + 2\mu\, r_0^{n+1} r_0 \\ &= a\lambda\, r_0^{n+1} + b\lambda\, r_0^n + a\mu\,(n+1)\, r_0^{n+1} - a\mu\, r_0^{n+1} + b\mu\, n\, r_0^n + \mu\, r_0^{n+1} a \\ &= a u_{n+1} + b u_n\,. \end{aligned}$$

Toutes les solutions sont déterminées par u_0 et u_1. A chaque couple (u_0, u_1) correspond un unique couple (λ, μ) qui fait que

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

est solution de (2.1) (exercice).

Pour le cas iii) il est plus facile de passer par les nombres complexes. On peut toujours trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_0 = z + \bar{z} \quad \text{et} \quad u_1 = zr + \bar{z}\bar{r}\,. \text{ (exercice)}$$

On en déduit que la suite

$$u_n = zr^n + \bar{z}\bar{r}^n$$

est solution de (2.1). Ce qui donne

$$zr^n + \bar{z}r^n = 2\mathrm{Re}(zr^n) = 2\mathrm{Re}(z)\,\rho^n\,\cos(n\theta) - 2\mathrm{Im}(z)\,\rho^n\,\sin(n\theta)\,.$$

□

2.4 Limites

Avant de commencer sur les limites, un petit exercice. Que peut-on dire de deux nombres réels a et b tels que $|a - b| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$?

Réponse : forcément $a = b$. En effet, si $a \neq b$ alors, posons $\varepsilon = |a - b|/2$. On a $\varepsilon > 0$ et donc par hypothèse on devrait avoir $|a - b| \leq \varepsilon$, ce qui n'est pas possible. Donc il ne reste que $a = b$.

Une petite application : que peut-on dire des nombres 1 et 0,9999999... ? Tout simplement : ce sont les mêmes nombres, ils sont égaux. En effet, la distance entre les deux nombres est plus petite que

$$1 - 0,999 = 0,001\,,$$

mais aussi plus petite que

$$1 - 0,9999999 = 0,0000001\,,$$

etc. On voit bien que la distance est plus petite que tout $\varepsilon > 0$. Donc en vertu de ce que l'on a démontré plus haut, ces deux nombres sont égaux. 1 et 0,9999999.... sont deux écritures différentes du même nombre.

Ce genre de considérations ammènent assez naturellement à la définition rigoureuse de limite. Comment exprimer mathématiquement que la suite

$u_n = 1/n$ tend vers 0 ? En effet, on voit bien que quand n croit, les nombres $1/n$ se rapprochent de plus en plus de 0, mais sans jamais prendre la valeur 0. Et si on prend un exemple plus compliqué comme $u_n = cos(n)/n$, on voit la suite se rapprocher de 0 mais avec des oscillations plus hératiques. Comment caractériser cela ?

On dit qu'une suite (u_n) tend vers une limite l si les tous les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de l quand n devient assez grand.

Autrement dit, pour toute marge $\varepsilon > 0$ que l'on se donne à l'avance, la suite (u_n) est toute entière comprise, au delà d'un certain rang n_0 (qui dépend de ε), dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Cela nous amène à la formulation officielle, qu'il faudra bien retenir car nous l'utiliserons sans arrêt. On dit, pour une suite (u_n), que sa limite est l quand n tend vers $+\infty$ si

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

En termes plus condensés ça donne

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Dans ce cas on dit que la suite est *convergente*, qu'elle *converge* vers l. On écrit ça aussi

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l\,,$$

ou parfois tout simplement

$$\lim u_n = l\,.$$

Revenons sur nos exemples et voyons comment montrer que la limite de nos deux suites est effectivement 0, avec cette définition. Commençons avec la suite $u_n = 1/n$. Soit $\varepsilon > 0$, si on veut que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$, cela veut dire $1/n \leq \varepsilon$, ou encore $n \geq 1/\varepsilon$. Donc en prenant pour n_0 le premier entier supérieur à $1/\varepsilon$ on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon\,.$$

Donc $\lim u_n = 0$.

Regardons le deuxième exemple : $u_n = \cos(n)/n$. Pour montrez que la limite est 0, il faut trouver n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|\cos(n)/n| \leq \varepsilon$. Comme $|\cos(n)| \leq 1$ pour tout n, on a

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

donc comme précédement il suffit de prendre $n_0 \geq 1/\varepsilon$. On a montré que $\lim u_n = 0$.

Quand une suite ne converge pas vers une limite $l \in \mathbb{R}$, elle peut avoir deux comportements différents. Elle peut tendre vers $\pm\infty$ ou bien ne pas avoir de limite du tout. Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voici les définitions de $\lim u_n = +\infty$ et de $\lim u_n = -\infty$. L'idée est assez proche de celle de la limite finie. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$, si elle devient toute entière plus grande que n'importe quel nombre $A > 0$ fixé à l'avance, pour peu qu'on attende un rang n_0 suffisamment grand:

$$\forall A > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A\,.$$

Pour la limite $-\infty$, la définition va de soit :

$$\forall A < 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A\,.$$

Regardons à la main un exemple, la suite $u_n = n^2$. Elle tend vers $+\infty$. La preuve en est que si on prend n_0 un entier plus grand que $\sqrt{A}$, alors pour tout $n \geq n_0$ on aura

$$u_n = n^2 \geq n_0^2 \geq A\,.$$

Pour finir, un peu de vocabulaire : une suite (u_n) est

– *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

– *minorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

– *bornée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On ne rappelle pas les définitions usuelles de suites *croissantes*, *décroissantes*, *monotones*.

Un résultat très important et utile.

Théorème 2.4.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration Si $\lim u_n = l$ alors on sait que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour $n \geq n_0$ la suite est bornée :

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|\ .$$

Les termes u_n pour $n \leq n_0$ étant en nombre fini, ils admettent aussi une borne. La suite (u_n) est donc toute entière bornée. $\square$

2.5 Propriétés des limites

Le premier résultat porte sur les opération élémentaires concernant les limites : addition, multiplication, etc.

Théorème 2.5.1 (Opérations sur les limites)

1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l, l' \in \mathbb{R}$ respectivement. Alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent respectivement vers $l + l'$ et ll'. De plus, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 et si $l' \neq 0$ alors (u_n/v_n) converge vers l/l'.

2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l \in \mathbb{R}$ et $+\infty$ respectivement. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$ si $l > 0$, vers $-\infty$ si $l < 0$ et est indéterminée si $l = 0$. Enfin, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 alors (u_n/v_n) converge vers 0.

3) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $+\infty$. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$. La suite (u_n/v_n) a un comportement indéterminé.

Démonstration

1) Nous commençons par l'addition des limites. Si $\lim u_n = l$ et si $\lim v_n = l'$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ et $n'_0(\varepsilon)$ dans $\mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et pour $n \geq n'_0(\varepsilon)$ on ait $|v_n - l'| \leq \varepsilon$. On a alors

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \ .$$

Donc en prenant $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon/2)\,,\, n'_0(\varepsilon/2)\}$, on voit que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Ce qui démontre la convergence voulue.

Nous démontrons maintenant le produit des limites. On garde les mêmes notations que ci-dessus. Par le Théorème 2.4.1, la suite (v_n) est bornée par une borne M'. On a

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &\leq |u_n v_n - l v_n| + |l v_n - ll'| \\ &\leq M' \, |u_n - l| + |l| \, |v_n - l'| \ . \end{aligned}$$

Prenons, par exemple

$$n_0 = \max\{n_0\left(\varepsilon/(2M')\right), n'_0\left(\varepsilon/(2\,|l|)\right) \ .$$

Pour $n \geq n_0$ on a donc

$$M' |u_n - l| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad |l| \, |v_n - l'| \leq \varepsilon/2$$

et donc pour $n \geq 0$ on a $|u_n v_n - ll'| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.

Il reste à démontrer le quotient des limites. Pour cela il suffit de montrer simplement que $\lim 1/v_n = 1/l'$, car après il ne reste plus qu'à appliquer la règle pour le produit.

Calculons un peu :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| .$$

Comme la suite (v_n) tend vers $l' \neq 0$, il existe m_0 tel que pour tout $n \geq m_0$ on ait $|v_n| \geq |l'|/2$. Le reste de la suite $|v_0|, |v_1|, \ldots, |v_{m_0-1}|$ est finie et tous les termes sont strictement positifs, donc c'est minoré par un $m > 0$. En conclusion, il existe un $M > 0$ tel que $|v_n| \geq M$ pour tout n. Ce qui donne là-haut :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| \leq \frac{1}{M \, |l'|} |v_n - l'| .$$

Ensuite il est facile de conclure comme on l'a déjà fait deux fois ci-dessus.

2) Si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En particulier, dans ce cas on a $u_n \geq l - \varepsilon$. Soit $A > 0$ fixé et soit $A' = A - l + \varepsilon$. Il existe un n'_0 tel que pour $n \geq n'_0$ on ait $v_n \geq A'$.

Si on pose $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon), n'_0\}$ alors pour $n \geq n_0$ on a

$$v_n + u_n \geq A' + l - \varepsilon = A .$$

On a démontré la convergence vers $+\infty$.

Quant à la suite $(u_n v_n)$, si la limite l est strictement positive, prenons $0 < \varepsilon < l/2$, on a pour n suffisamment grand

$$u_n v_n \geq (l - \varepsilon) A$$

et la conclusion suit facilement. Le cas $l < 0$ se fait de manière analogue.

Montrons que $(1/v_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A = 1/\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $v_n \geq A$. On a donc $0 < 1/v_n \leq 1/A = \varepsilon$. Cela démontre la convergence voulue.

3) Faisons ça un peu plus rapidement, pour n assez grand on a

$$u_n + v_n \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A .$$

D'où la première propriété. De même, pour n assez grand on a

$$u_n v_n \geq \sqrt{A}\,\sqrt{A} = A\,.$$

D'où la seconde propriété.

Enfin, pour terminer, voyons, à travers des exemples, que les cas dits "indéterminés" peuvent effectivement donner lieu à tous les scénarios.

Tout d'abord la situation "$0 \times \infty$", qui vaut aussi pour "∞/∞". Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. La suite $u_n = 1/n^\alpha$ tend vers 0, la suite $v_n = n^\beta + \gamma$ tend vers $+\infty$. Le produit $u_n v_n$ tend vers 0 si $\alpha > \beta$, vers $+\infty$ si $\alpha < \beta$ et vers $\gamma \in \mathbb{R}$ si $\alpha = \beta$. On peut donc avoir toutes les limites possibles.

On peut même ne pas avoir de limite du tout : $v_n = (2 + (-1)^n)n$ tend vers $+\infty$, la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0 et pourtant la suite $u_n v_n = 2 + (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voyons maintenant les cas de type "$(+\infty) + (-\infty)$", ou "$(+\infty) - (+\infty)$". Si on prend $u_n = n^\alpha$ et $v_n = n^\beta + \gamma$, elles tendent toutes les deux vers $+\infty$. Pourtant $v_n - u_n$ tend vers $+\infty$ si $\beta > \alpha$, tend vers $-\infty$ si $\beta < \alpha$ et vers γ si $\alpha = \beta$. Enfin, en prenant $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = n$ on a un exemple où $u_n - v_n$ n'a pas de limite. $\square$

Le théorème suivant est souvent très utile pour montrer qu'une suite a une limite donnée.

Théorème 2.5.2 (Théorème des gendarmes) *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *3 suites réelles.*

1) Si les suites (u_n) *et* (w_n) *ont la même limite* $l \in \mathbb{R}$, *et si on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = l$.

2) Si (u_n) *a pour limite* $+\infty$ *et si*

$$u_n \leq v_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = +\infty$.

3) Si (w_n) *a pour limite* $-\infty$ *et si*

$$v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration Faisons le cas 1) en détails, les autres cas sont laissés comme exercices.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \,, \\ |u_n - l| \leq \varepsilon \,, \\ |w_n - l| \leq \varepsilon \,. \end{cases}$$

En particulier on a

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \,, \\ l - \varepsilon \leq u_n \,, \\ w_n \leq l + \varepsilon \,. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq l + e \quad \Longleftrightarrow \quad |v_n - l| \leq \varepsilon \,.$$

$\square$

Enfin nous terminons sur un théorème très important d'existence de limite.

Théorème 2.5.3 *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisement:*
1) Toute suite croissante majorée admet une limite finie

$$l = \sup\{u_n \,;\; n \in \mathbb{N}\} \,.$$

2) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3) Toute suite décroissante minorée admet une limite finie

$$l = \inf\{u_n \,;\; n \in \mathbb{N}\} \,.$$

4) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration
1) C'est une conséquence assez simple de la caractérisation du sup (Théorème 1.4.3). L'ensemble

$$A = \{u_n \,;\; n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide et majoré par hypothèse. Il admet donc un sup noté l. Par le Théorème 1.4.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $l - a \leq \varepsilon$. Autrement dit, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l - u_{n_0} \leq \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a forcement, pour tout $n \geq n_0$

$$l - u_n \leq \varepsilon \,.$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

2) Si la suite est non majorée cela veut dire que pour tout $A > 0$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$. Mais comme la suite est croissante, cela veut dire que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. C'est exactement la définition du fait que $\lim u_n = +\infty$.

Les autres cas ont traités de manière identique. □

Théorème 2.5.4 (Suites adjacentes) *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $u_n \leq v_n$ (au moins à partir d'un certain rang). Si $\lim v_n - u_n = 0$ alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite finie.*

Démonstration On a $u_n \leq v_n$, mais comme (v_n) est décroissante, on a $u_n \leq v_0$. Et cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est majorée. Par le Théorème 2.5.3 elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$.

Avec le même genre de raisonnement (v_n) est décroissante minorée donc convergente vers un l'. Mais si on veut que $\lim u_n - v_n = 0$ il faut que $l = l'$.
□

2.6 Sous-suites

Soit (u_n) une suite réelle. Une *sous-suite* de (u_n) est une suite

$$v_k = u_{n_k}\ ,\ \ k \in \mathbb{N}$$

où (n_k) est une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Lemme 2.6.1 *Toute suite strictement croissante (n_k) dans $\mathbb{N}$ vérifie $n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration C'est vrai pour $k = 0$. On raisonne ensuite par récurence : si $n_k \geq k$, comme $n_{k+1} > n_k$ cela donne $n_{k+1} > k$ et donc $n_{k+1} \geq k + 1$. □

Au lieu de sous-suite, on parle parfois de *suite extraite.*

Proposition 2.6.2 *Si (u_n) est une suite ayant pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ alors toute sous-suite de (u_n) converge vers la même limite. En particulier si une suite (u_n) admet des sous-suites ayant des limites différentes alors (u_n) n'admet pas de limite.*

Démonstration Nous donnons la preuve dans le cas où la limite est $l \in \mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés au lecteur. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Soit (u_{n_k}) une sous-suite de (u_n). Soit k_0 tel que $n_{k_0} \geq n_0$, alors pour $k \geq k_0$ on a $n_k \geq n_0$ et donc $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.

La deuxième remarque vient juste de la contraposée de la propriété établie ci-dessus. □

Notre but maintenant est de démontrer un théorème fondamental de l'analyse, le théorème de Bolzano-Weierstrass. Tout d'abord une première étape.

Théorème 2.6.3 (Théorème de Ramsey) *Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle. On considère l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}\,;\ \forall k > n\,,\ u_k < u_n\}\,.$$

Concernant cet ensemble A deux cas se présentent : ou bien A est fini (y compris vide), ou bien il est infini.

Si A est fini ou vide, il admet un élément maximal n_0 (on pose $n_0 = -1$ dans le cas où A est vide). On pose $p_0 = n_0 + 1$, donc $p_0 \notin A$. Par définition de A, on sait qu'il existe $p_1 > p_0$ tel que $u_{p_1} \geq u_{p_0}$ (car sinon $p_0 \in A$). De même, il existe $p_2 > p_1$ tel que $u_{p_2} \geq r_{p_1}$ car sinon $p_1 \in A$. Et ainsi de suite, par récurrence on construit une suite strictement croissante d'entier (p_k) tels que $u_{p_{k+1}} \geq u_{p_k}$ pour tout k. On a bien construit une sous-suite croissante de (u_n).

Si A est infini, alors on peut écrire $A = \{p_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers. On a en particulier $u_{p_{n+1}} < u_{p_n}$ par définition de A. Ainsi la sous-suite (u_{p_n}) est décroissante. □

Théorème 2.6.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle bornée. Par le Théorème de Ramsey elle admet une sous-suite monotone. Cette sous-suite monotone est aussi bornée, donc par le Théorème 2.5.3, elle est convergente. □

2.7 $\liminf$ et $\limsup$ (hors programme)

Soit (u_n) une suite réelle, bornée pour commencer. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \sup\{u_p\,;\ p \geq n\}\,.$$

La suite (M_n) est décroissante, car pour $m \geq n$ l'ensemble $\{u_p\,;\ p \geq m\}$ est inclus dans $\{u_p\,;\ p \geq n\}$ et donc son sup est forcément plus petit. La suite (M_n) est aussi bornée, comme (u_n), donc elle admet une limite finie (Théorème 2.5.3) que l'on note

$$\limsup u_n \,,$$

la *limite supérieure* de (u_n). Notez bien que cette limite existe toujours, quelque soit la suite bornée (u_n). Notez aussi que

$$\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p \,.$$

Maintenant pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m_n = \inf\{u_p\,;\ p \geq n\} \,.$$

La suite (m_n) est croissante, car pour $m \geq n$ l'ensemble $\{u_p\,;\ p \geq m\}$ est inclus dans $\{u_p\,;\ p \geq n\}$ et donc son inf est forcément plus grand. La suite (m_n) est aussi bornée, comme (u_n), donc elle admet une limite finie (Théorème 2.5.3) que l'on note

$$\liminf u_n \,,$$

la *limite inférieure* de (u_n). Notez bien que cette limite existe toujours, quelque soit la suite bornée (u_n). Notez aussi que

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p \,.$$

Dans le cas où la suite (u_n) est non majorée on pose $\limsup u_n = +\infty$; la suite (m_n) est croissante mais non majorée, elle peut tendre vers une limite finie aussi bien que vers $+\infty$. Dans ce dernier cas on a aussi $\liminf u_n = +\infty$. Si la suite (u_n) est non minorée on pose $\liminf u_n = -\infty$. ; la suite (M_n) est décroissante mais non minorée, elle peut tendre vers une limite finie, aussi bien que vers $-\infty$. Dans ce cas on a aussi $\limsup u_n = -\infty$.

Notez que l'on a toujours

$$\limsup u_n \geq \liminf u_n$$

(exercice).

Voici la principale application de ces notions de lim inf et lim sup.

Théorème 2.7.1 *Une suite réelle* (u_n) *admet une limite* $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ *si et seulement si*

$$\limsup u_n = \liminf u_n \,,$$

auquel cas la limite l *de* (u_n) *est cette valeur commune de* $\limsup u_n$ *et* $\liminf u_n$.

Démonstration Dans un sens. Si (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier pour $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{p \geq n} u_p \leq l + \varepsilon \,.$$

Ce qui prouve que $\limsup u_n \leq l + \varepsilon$. Comme ceci est vrai quelque soit ε on a $\limsup u_n \leq l$. De même pour $n \geq n_0$ on a

$$\inf_{p \geq n} u_p \geq l - \varepsilon \,.$$

Ce qui prouve que $\liminf u_n \geq l - \varepsilon$. Comme ceci est vrai quelque soit ε on a $\limsup u_n \geq l$. Comme $\limsup u_n \geq \liminf u_n$ cela implique que les deux limites sont égales à l.

Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors elle est non majorée et donc $\limsup u_n = +\infty$. De plus, pour tout $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. Ce qui veut dire que $\inf_{p \geq n} u_n \geq A$ pour $n \geq n_0$ et donc que $m_n \geq A$ (avec les notations de ci-dessus). Donc la suite croissante (m_n) tend vers $+\infty$ et $\liminf u_n = +\infty$.

Le cas de la limite $-\infty$ se traite exactement de la même façon.

Nous montrons maintenant la réciproque. Si $\limsup u_n = \liminf u_n = l \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\sup_{p \geq n} u_p \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{p \geq n} u_p \geq l - \varepsilon \,.$$

En particulier, $|u_p - l| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq n_0$. Ce qui démontre la convergence annoncée.

Nous laissons au lecteur les autres cas en exercice. □

2.8 Le critère de Cauchy

La plupart du temps, pour montrer qu'une suite est convergente il faut avoir une intuition de ce que vaut sa limite et ensuite montrer cette convergence

($|u_n - l| \leq \varepsilon$). Le résultat que nous allons établir ici est fondamental. Il caractérise le fait qu'une suite converge (vers une limite finie) sans que l'on ait besoin de connaître cette limite.

On dit qu'une suite (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ p, q \geq n_0 \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon\,.$$

Lemme 2.8.1 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit n_0 tel que décrit ci-dessus. On a en particulier

$$|u_p - u_{n_0}| \leq \varepsilon$$

pour tout $p \geq n_0$. Donc la suite (u_n) est bornée à partir de n_0. Elle est donc bornée. □

Théorème 2.8.2 (Critère de Cauchy) *Une suite réelle (u_n) converge vers une limite finie si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration Si (u_n) tend vers l, alors (en faisant court, avec les notations habituelles maintenant), on a pour $p, q \geq n_0$

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq 2\varepsilon\,.$$

Donc elle est de Cauchy.

Réciproquement si (u_n) est de Cauchy alors elle est bornée par le lemme ci-dessus. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite l. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq n_0$ on ait $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon/2$ et tel que pour $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| \leq \varepsilon/2$. Soit $k \geq n_0$ on a $n_k \geq k$ (par le Lemme 2.6.1) et

$$\begin{aligned} |u_k - l| &\leq |u_k - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que (u_n) converge vers l. □

2.9 Les suites complexes

Le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}$ ne diffère pas beaucoup du cas réel. La seule vraie différence vient de ce qu'il n'existe pas d'ordre total sur $\mathbb{C}$. Ainsi on utilise pas de notion d'ordre sur $\mathbb{C}$ et certaines notions sur les suites disparaissent sur $\mathbb{C}$: suites croissantes ou décroissantes, $+\infty$, $-\infty$, sup, inf, lim sup, lim inf, etc.

Pour ce qui concerne la convergence simple vers une valeur finie les choses changent peu, il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules ! En effet, une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Une suite complexe (u_n) admet une *partie réelle* (x_n) et une *partie imaginaire* (y_n) qui sont des suites réelles telles que $u_n = x_n + iy_n$ pour tout n.

Il est facile de montrer que la suite (u_n) converge dans $\mathbb{C}$ vers $l = x + iy$ si et seulement si (x_n) converge vers x et (y_n) converge vers y.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass et le critère de Cauchy restent vrais dans le cas complexe.

2.10 Approximation des réels

Avec le langage des suites et des limites nous pouvons maintenant revenir sur les nombres réels et leur propriétés d'approximations.

Tout d'abord revenons sur le sup.

Théorème 2.10.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré, soit $\alpha = \sup A$. Alors il existe une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim u_n = \alpha$.*

Ce résultat reste aussi valable lorsque A est non vide mais non majoré, i.e. que $\sup A = +\infty$.

Démonstration D'après le Théorème 1.4.3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_n \in A$ tel que $\alpha - u_n \leq 1/n$. La suite (u_n) ainsi construite vérifie bien les propriétés annoncées.

Si l'ensemble A est non majoré, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in A$ tel que $u_n \geq n$. La suite (u_n) est incluse dans A et tend bien vers $+\infty$. $\square$

Revenons maintenant sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.10.2 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim q_n = r$.*

Démonstration On utilise le Théorème 1.4.2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in]r, r + 1/n[$. Cette suite (q_n) vérifie les propriétés annoncées (en utilisant le théorème des gendarmes). $\square$

Dans le théorème ci-dessus on voit bien qu'il y a plein de suites de rationnels qui convergent vers r et que de plus la démonstration du théorème ci-dessus ne donne pas de procédé constructif pour construire une telle suite. Nous allons maintenant passer un peu sur une approximation rationnelle très importante : le développement décimal.

Théorème 2.10.3 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite unique (m_n) tels que :*
– *$m_0 \in \mathbb{Z}$ et pour pour $n \geq 1$ on ait $m_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$,*
– *la suite (m_n) ne termine pas par une suite infinie de 9,*
– *on ait*

$$r = \lim_{n \to +\infty} m_0 + \sum_{k=1}^{n} m_k \, 10^{-k} .$$

Démonstration On pose $m_0 = [r]$ et $r_1 = r - m_0$. On a alors $r_1 \in [0, 1[$ et donc $10r_1 \in [0, 10[$. Soit $m_1 = [10r_1]$, on a donc bien $m_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$. On pose $r_2 = 10r_1 - m_1 \in [0, 1[$. Notez qu'on a

$$r = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{r_2}{10} .$$

Et ainsi de suite, on construit par récurrence, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une famille $(m_n)_{1 \leq n \leq N}$ dans $\{0, 1, \dots, 9\}$ telle que

$$r = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k \, 10^{-k} + \frac{r_{N+1}}{10^N}$$

avec $r_{N+1} \in [0, 1[$. Si on pose $q_N = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k \, 10^{-k}$, on a alors $|r - q_N| \leq 10^{-N}$ et donc $\lim q_N = r$. On a démontré l'existence de la suite vérifiant la troisième propriété.

Pour le moment rien n'empêche cette suite de terminer par une infinité de 9. Mais notez que si

$$x = 0,00\dots009999999\dots = 10^{-N_0} \times 0,9999999\dots$$

alors, comme nous l'avons montré en début de chapitre, on a aussi

$$x = 10^{-N_0} \times 1 = 10^{-N_0} = 0,00\dots01 .$$

On conclut facilement.

Il reste à montrer l'unicité. Admettons que l'on ait deux telles suites (m_n) et (p_n). On a en particulier

$$[r] = m_0 = p_0 .$$

Ensuite
$$[10(r - m_0)] = m_1 = p_1\,.$$
Et ainsi de suite, on conclut facilement par récurrence. □

L'unique suite associée à $r \in \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ci-dessus est appelée *développement décimal de* r.

On connaît tous au moins une partie du développement décimal de π :
$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\ldots$$
qui ne s'arrête pas. On connaît aujourd'hui des milliards de décimales de π.

Mais comment reconnaître dans un développement décimal qu'un nombre est rationnel ou irrationnel ? C'est une propriété très remarquable du développement décimal que l'on puisse faire la différence. On dit qu'un développement décimal (m_n) associé à r est *périodique à partir d'un certain rang* si au delà d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ la suite (m_n) est périodique, y compris le cas d'un développement fini (on considère qu'il y a une suite de 0 pour finir.

Théorème 2.10.4 *Soit $r \in \mathbb{R}$ de développement décimal (m_n). Alors r est rationnel si et seulement si (m_n) est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration Tout d'abord montrons que tout nombre rationnel a son développement décimal qui est périodique. Soit $r = p/q$ un rationnel, que l'on peut supposer appartenant à $[0, 1[$, après lui avoir retiré sa partie entière. Si on regarde la construction de la suite (m_n) correspondant à son développement décimal, on voit que cela correspond à effectuer la division euclidienne de p par q. En effet, multiplier par 10 correspond à "abaisser le 0", ensuite comme $p < q$ la division de $10p$ par q donne un diviseur appartenant à $\{0, 1, \ldots, 9\}$ et un reste appartenant à $\{0, 1, \ldots q - 1\}$. Et ainsi de suite.

Deux scénarios sont alors possibles : soit le reste est à un moment 0, la division s'arrête et elle est donc périodique, soit elle ne finit pas. Mais comme les différents restes appartiennent à un ensemble fini $\{0, 1, \ldots q - 1\}$, forcement à un moment la suite des reste repasse par la même valeur. Alors la division euclidienne donnera le même diviseur, le même reste etc. La suite devient périodique. Faites par exemple la division à la main de 1 par 7.

Nous montrons maintenant pour conclure que tout réel r dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est forcément un rationnel. Un tel réel s'écrit comme un rationnel $m_0, m_1\, m_2\, \ldots m_{n_0}$ plus la partie périodique :
$$s = 0,00\ldots00\,p_1\,p_2\,\ldots p_K\,p_1\,p_2\,\ldots\,p_K\,\ldots$$

On a

$$\begin{aligned} 10^{n_0} s &= 0, p_1 \, p_2 \, \ldots p_K \, p_1 \, p_2 \, \ldots \, p_K \, \ldots \\ 10^{n_0+K} s &= p_1 \, p_2 \, \ldots p_K, \, p_1 \, p_2 \, \ldots \, p_K \, \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1 \, p_2 \, \ldots p_K &= 0, p_1 \, p_2 \, \ldots p_K \, p_1 \, p_2 \, \ldots \, p_K \, \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1 \, p_2 \, \ldots p_K &= 10^{n_0} s \, . \end{aligned}$$

Ainsi s est rationnel. □

Remarque : Il est important de noter que tout ce que nous avons fait ici avec le développement en base 10 peut se faire de même avec n'importe quelle autre base. En particulier il y a une autre base qui est vraiment importante parfois, c'est la base 2. On parle alors de *décomposition dyadique* des réels.

2.11 Questions de cours

Les choses à retenir absolument de ce chapitre sont :

– Formule pour la somme d'une suite géométrique.

– Si une une suite est donnée par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ savoir exprimer u_n en fonction de n (équation caractéristique, forme générale de la solution avec des paramètres λ, μ). Savoir calculer λ et μ si u_0 et u_1 sont donnés.

– Définitions exactes des limites de suites (finies, infinies).

– Toute suite convergente est bornée. Avec la démonstration.

– Opérations sur les limites : connaître le théorème. Etre capable de retrouver facilement les arguments pour montrer que limite de la somme c'est la somme des limites, idem pour le produit, idem pour $1/\infty$. Etre capable de sortir des exemples de formes indéterminées qui donnent tous les comportements possibles.

– Le théorème des gendarmes.

– Toute suite monotone admet une limite. Cas majoré, cas non majoré. Avec démonstration.

– Suites adjacentes : définition, théorème principal.

– Sous-suites : définition, elles ont la même limite que la suite principale (et la contraposée : si une suite admet deux limites différentes pour des sous-suites, alors elle est non convergente).

– Théorème de Ramsey

– Théorème de Bolzano-Weierstrass

– Suite de Cauchy : définition, théorème principal (Critère de Cauchy).

– Il existe toujours une suite qui tend vers le sup.

– Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Chapter 3

Fonctions d'une variable réelle

3.1 Définitions de base, terminologie

Une *fonction réelle* est une application f d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. C'est à dire qu'à tout élément $x \in D$ la fonction f associe une valeur $f(x) \in A$. On note ça :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x)\,. \end{array}$$

On note f la fonction et $f(x)$ sa valeur au point x. Pour parler d'une fonction précise on peut par exemple parler de la fonction $x \mapsto x^2$.

Pour un $x \in D$, la valeur $y = f(x) \in A$ est l'*image* de x par f. Inversement x est l'*antécédent* de y.

L'ensemble D est le *domaine* de f, c'est l'ensemble des points où la fonction est bien définie. On le note parfois Dom f

L'ensemble

$$\{f(x)\,;\ x \in D\}$$

est l'*image* de f, on le note Im f ou Ran f.

Plus généralement, pour tout ensemble $E \subset \mathrm{Dom}\ f$ on note

$$f(E) = \{f(x)\,;\ x \in E\}\,.$$

Pour tout ensemble $F \subset \mathrm{Ran}\ f$ on note

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathrm{Dom}\ f\,;\ f(x) \in F\}\,.$$

Enfin, le *graphe* de f est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\,;\ x \in \mathrm{Dom}\ f\}\,.$$

Une fonction f est dite *injective* si pour tout $x \neq y \in \mathrm{Dom}\, f$ on a $f(x) \neq f(y)$. Cela veut dire en particulier que tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$ a un unique antécédent.

Une fonction f est dite *surjective sur* $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $y \in A$ il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, si tout élément de A admet un antécédent.

Une fonction $f\ : D \to A$ est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, pour tout $y \in A$ il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Cet unique x associé à y est noté $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une nouvelle fonction

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & A & \longrightarrow & D \\ & & y & \longmapsto & f^{-1}(x)\,. \end{array}$$

Notez bien la relation importante

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y\,.$$

La fonction f^{-1} est la *fonction réciproque* de f.

Notez que f^{-1} est alors aussi bijective (exercice) et que $(f^{-1})^{-1} = f$ (exercice).

Proposition 3.1.1 *Si f est bijective alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $(y = x)$.*

Démonstration Soit (a, b) un point de Γ_f, alors cela veut dire qu'il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $a = x$ et $b = f(x)$. Le symétrique de ce point par rapport à $(y = x)$ est le point (b, a), c'est à dire $(b, f^{-1}(b))$. C'est donc bien un point de $\Gamma_{f^{-1}}$. Ainsi le symétrique de Γ_f est inclus dans $\Gamma_{f^{-1}}$.

Avec un raisonnement en tout point similaire on voit que le symétrique de $\Gamma_{f^{-1}}$ est inclus dans Γ_f. On conclut facilement. $\square$

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $\mathrm{Ran}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g$. On peut alors définir la fonction *composée*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f & : & \mathrm{Dom}\, f & \longrightarrow & \mathrm{Ran}\, g \\ & & x & \longmapsto & g(f(x))\,. \end{array}$$

Notez que, si f est bijective alors $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$ et que $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$.

On dit qu'une fonction $f\ :\ D \to A$ est *croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \leq f(y)$. Elle est *strictement croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) < f(y)$.

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est *décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \geq f(y)$. Elle est *strictement décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) > f(y)$.

Dans tous les cas on dit que f est *monotone*, resp. *strictement monotone*.

Vous noterez qu'une fonction strictement monotone est injective. Le contraire n'est pas vrai, je vous laisse trouver tout seul un contre exemple.

3.2 Exemples

Voici une première petite liste de fonctions usuelles.

3.2.1 Fonctions affines

Ce sont toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b$$

pour un a et un b fixés dans $\mathbb{R}$. Le graphe est à chaque fois une droite.

Elles sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

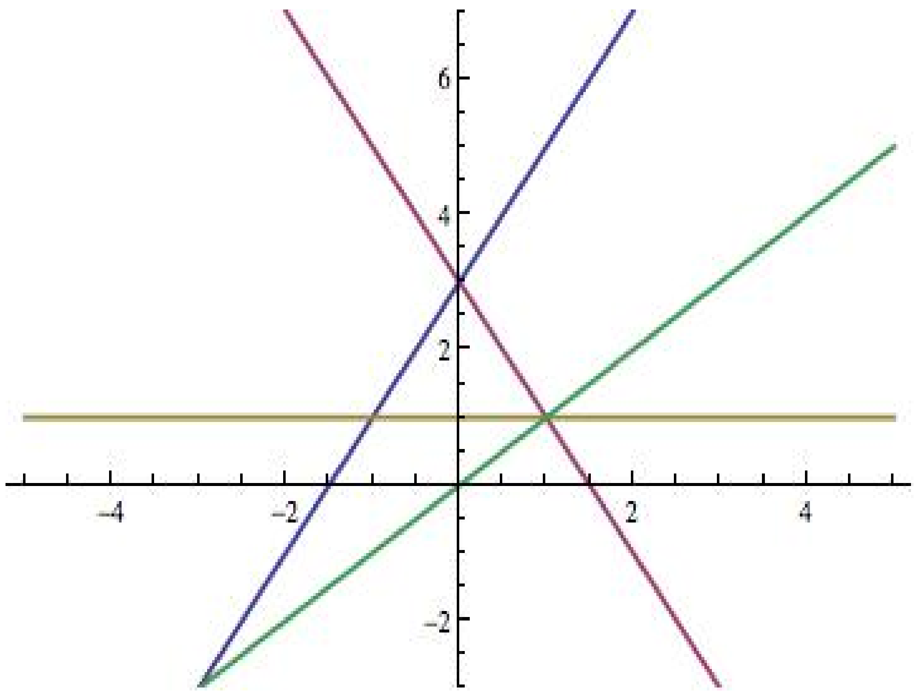

Figure 3.1: $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = -2x + 3$

3.2.2 Fonctions puissances

Tout d'abord les puissances entières : $f(x) = x^n$, pour un $x \in \mathbb{N}$. Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

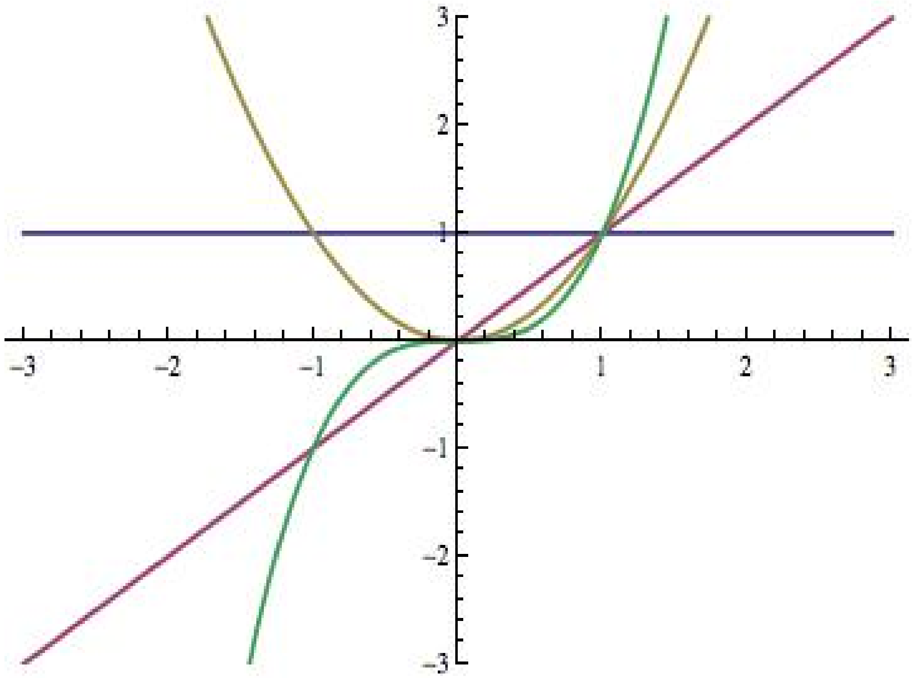

Figure 3.2: $f(x) = x^0$, $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

Ensuite les inverses de puissances entières : $f(x) = x^{-n}$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

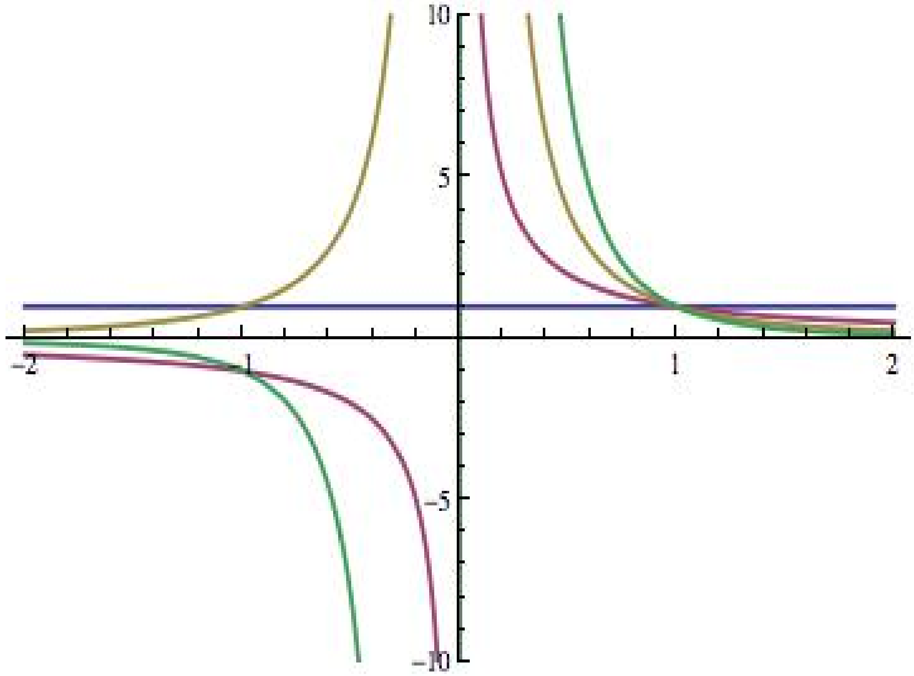

Figure 3.3: $f(x) = 1/x^0$, $f(x) = 1/x^1$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/x^3$

Ensuite les racines n-ièmes : $f(x) = x^{1/n}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

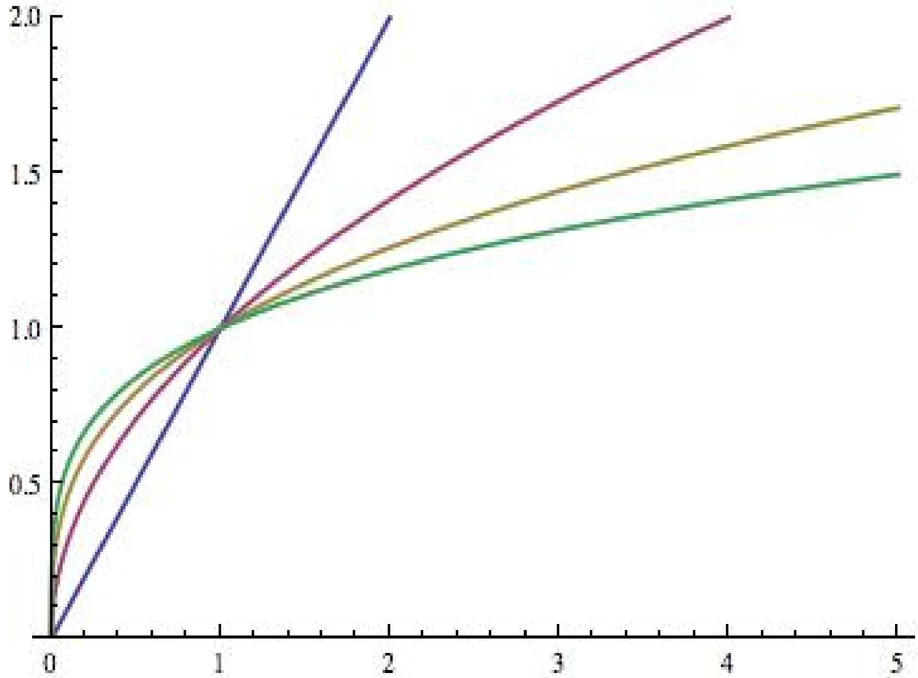

Figure 3.4: $f(x) = x^{1/1}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{1/4}$

Notez que quand n est impair, on peut définir $x^{1/n}$ sur tout $\mathbb{R}$ en posant

$$x^{1/n} = -(-x)^{1/n}\,.$$

C'est encore l'unique réel y tel que $y^n = x$. Lorsque n est pair il n'y a pas de telle extension.

La combinaison de toutes ces fonctions puissances permet de définir les *fonction puissances rationnelles*. En effet, soit $q \in \mathbb{Q}$, de la forme $q = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x > 0$ on pose

$$x^q = x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (x^a)^{1/b}\,.$$

Les fonctions puissances rationnelles sont donc définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

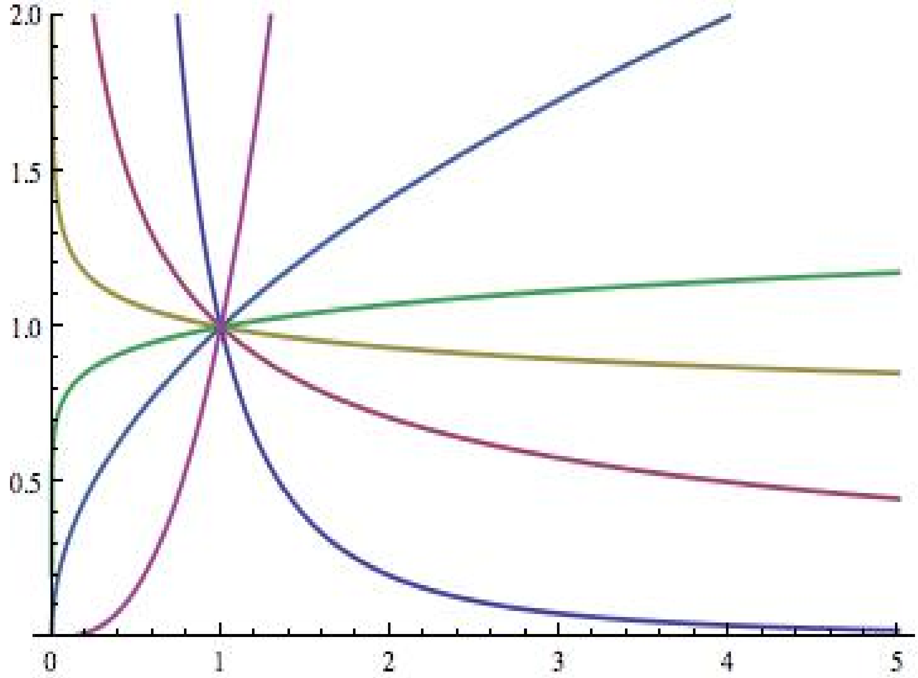

Figure 3.5: $f(x) = x^{-7/3}$, $f(x) = x^{-1/2}$, $f(x) = x^{-1/10}$, $f(x) = x^{1/10}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{8/3}$

Notez les propriétés importantes suivantes qui se démontrent facilement (exercice).

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 1^q &= 1 \\ x^{a+b} &= x^a\,x^b \\ x^{ab} &= (x^a)^b\,. \end{aligned}$$

Notez que c'est de là que viennent les notations x^{-n}, $x^{1/n}$. En effet :

$$x^n\,x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$$

donc
$$x^{-n} = 1/x^n\,.$$
De même
$$(x^{1/n})^n = x^1 = x$$
donc $x^{1/n}$ est la racine n-ième de x.

On appelle *fonctions homographiques* les fonctions de la forme
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$
où a, b, c, d sont des réels, avec $c \neq 0$. Notez qu'on a alors
$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}\,.$$
Si $bc = ad$ alors la fonction f est constante. Sinon, en translatant le graphe de f du vecteur $(d/c, a/c)$ on obtient
$$f\left(x - \frac{d}{c}\right) - \frac{a}{c} = \frac{b - \frac{ad}{c}}{x}\,,$$
et en appliquant une homothétie de coefficient $c/(bc-ad)$ on obtient le graphe de $1/x$.

3.2.3 Valeur absolue et partie entière

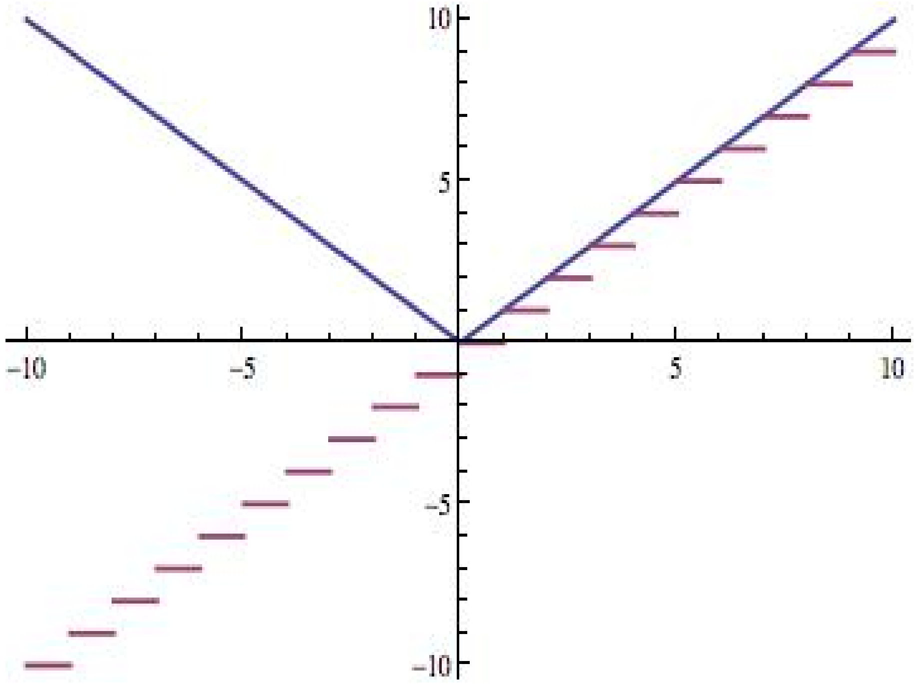

Figure 3.6: $f(x) = |x|$, $f(x) = E[x]$

3.2.4 Autres fonctions

Citons quelques autres fonctions que nous verrons plus en détails plus tard.

Les fonctions *exponentielle* et *logarithme*.

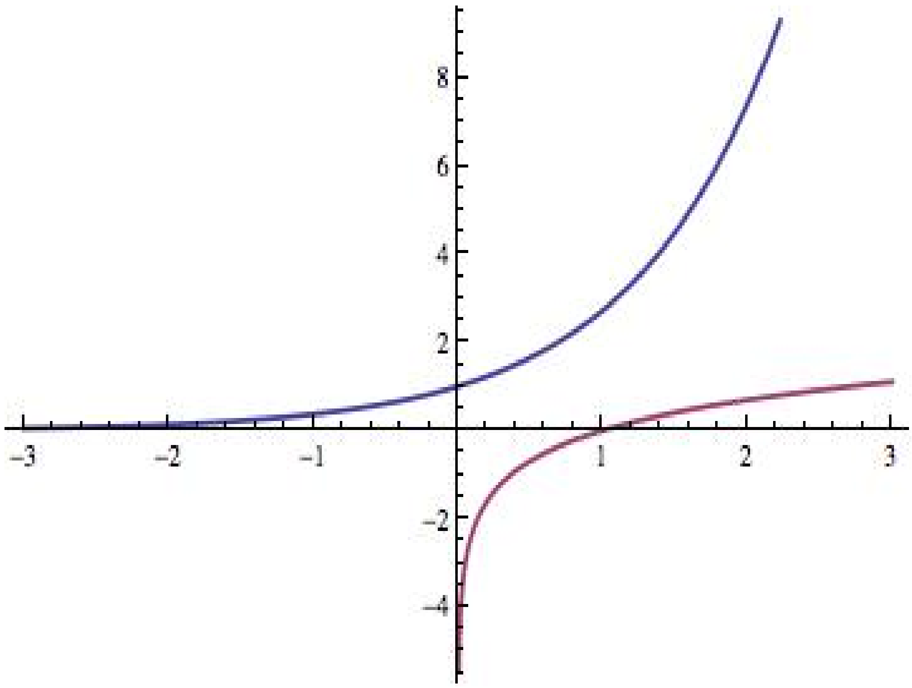

Figure 3.7: $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$

Les fonctions trigonométriques *cosinus*, *sinus*, *tangente*.

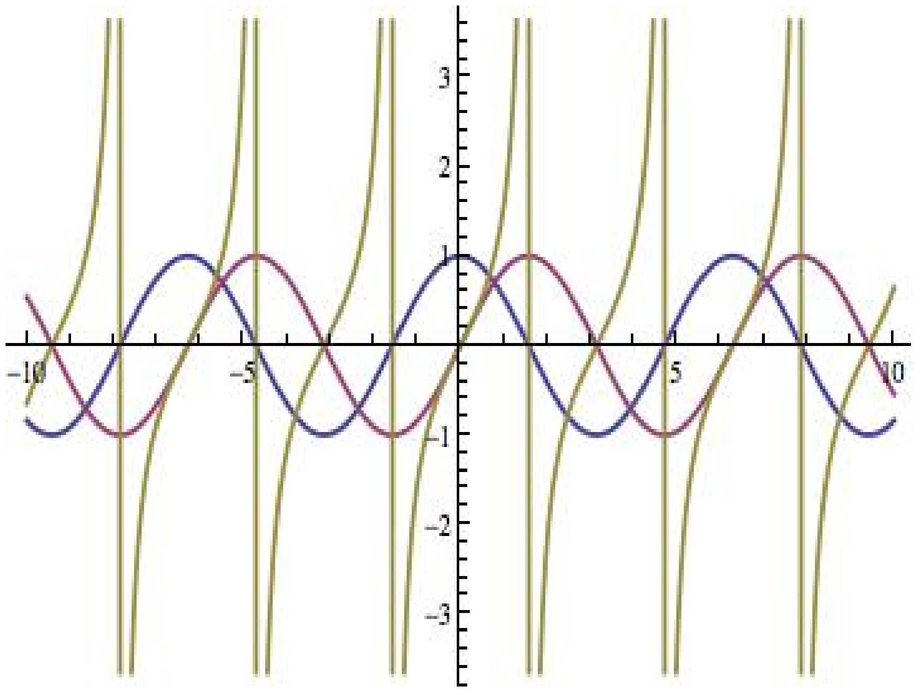

Figure 3.8: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \tan(x)$

3.3 Limites

La définition des limites pour les fonctions est assez proche de ce que l'on a vu pour les suites. La différence vient essentiellement du fait que pour les suites on ne pouvait considérer que la limite quand n tend vers $+\infty$. Pour une fonction f on peut considérer la limite de f en tout point de son domaine, ou du "bord" de son domaine.

L'idée de base est la même. On dit que la limite de f est b quand x tend vers a si, pour toute marge $\varepsilon > 0$ petite et choisie à l'avance, la fonction vérifie $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ pour peu qu'on prenne x suffisamment proche de a, i.e. $|x - a| \leq \delta$, pour un certain δ.

Voici les définitions. On considère une fonction f définie sur un domaine D. On ne peut parler de limite de la fonction f qu'en des points *adhérents* à D, c'est à dire des points qui sont limites d'une suite de points de D. Cela inclut en particulier les points de D eux-mêmes. De manière équivalente, un point $p \in \mathbb{R}$ est *adhérent* à D si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists x \in D\,;\ |x - p| \leq \varepsilon\,.$$

On peut aussi regarder la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ si ces valeurs sont limites de points de D (i.e. si D est non majoré, resp. non minoré). On dit parfois, pour faire plus simple, dans ces cas que $+\infty$ (ou $-\infty$) est *adhérent* à D. On ne dit par contre pas *point adhérent* dans ces cas.

Nous pouvons maintenant passer aux définitions des limites.

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall A < 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies f(x) \leq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall A < 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies f(x) \leq A\,.$$

Avec les limites de fonctions on a aussi les notions très importantes de *limites à gauche* et de *limites à droite*.

On dit que

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b$$

si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a < x \leq a+\delta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b$$

si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a-\delta \leq x < a \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists\delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a < x \leq a+\delta \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists\delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a-\delta \leq x < a \implies f(x) \geq A\,.$$

etc.

3.4 Propriétés des limites

Il existe une caractérisation utile des limites de fonctions en terme de suites.

Proposition 3.4.1 *Une fonction réelle f admet une limite l finie, ou infinie, en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) dans* Dom f *telle que $\lim x_n = a$, on a $\lim f(x_n) = l$. On a la caractérisation analogue pour les limites à gauche et à droite.*

Démonstration Faisons le cas d'une limite finie, en un point fini. Les autres cas sont laissés en exercice.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et si (x_n) est une suite dans Dom f telle que $\lim x_n = a$ alors

$$\forall\varepsilon > 0\,,\; \exists\delta > 0\,;\; x \in \mathrm{Dom}\, f\,,\; |x-a| \leq \delta \;\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\,.$$

Mais pour ce $\delta > 0$ donné, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|x_n - a| \leq \delta$. On aura donc $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. D'où le résultat dans un sens.

Pour prouver la réciproque on va raisonner par l'absurde. Supposons le contraire de $\lim_{x\to a} f(x) = l$. C'est à dire supposons

$$\exists\varepsilon > 0\,,\ \forall\delta > 0\,,\ \exists x \in \text{Dom } f\,;\ |x-a| \le \delta\,,\ |f(x)-l| > \varepsilon\,.$$

Prenons $\delta = 1/n$ et notons x_n un de ces x tels que ci-dessus. On a $|x_n - a| \le 1/n$, donc la suite (x_n) tend vers a (et elle est incluse dans Dom f). Mais pourtant $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ et donc $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. On a montré qu'il existe une suite (x_n) dans Dom f qui tend vers a et telle que $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. Ce qui est exactement la contraposée de "pour toute suite (x_n) dans Dom f telle que $\lim x_n = a$, on a $\lim f(x_n) = l$". □

Avec cette caractérisation par les suites de la limite des fonctions, on voit assez facilement que tous les résultats du Théorème 2.5.1 vont passer, sans modification, aux limites de fonctions pour l'addition, la multiplication, le quotient etc. Nous n'énonçons pas explicitement ce théorème.

Par contre on a un point nouveau avec les fonctions, ce sont les compositions de limites.

Proposition 3.4.2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *et si* $\lim_{x\to l} g(x) = L$ *alors* $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = L$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in$ Dom g tel que $|x - l| \le \delta$ on ait $|g(x) - L| \le \varepsilon$. Soit $\delta' > 0$ tel que si $x \in$ Dom f et $|x - a| \le \delta'$ alors $|f(x) - l| \le \delta$. On a donc pour $|x - a| \le \delta'$ la relation $|g(f(x)) - L| \le \varepsilon$ si $x \in$ Dom f et si $f(x) \in$ Dom g, c'est à dire si $x \in$ Dom $g \circ f$. D'où le résultat. □

On dit qu'une fonction f a une certaine propriété P (par exemple est croissante) au *voisinage* d'un point a adhérent à Dom f, si il existe $\delta > 0$ tel que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [a - \eta, a + \eta]$. On dit qu'une fonction f a une propriété P au *voisinage à gauche* d'un point a adhérent à Dom f, si il existe $\delta > 0$ tel que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [a - \eta, a[$. De même on définit *voisinage à droite*.

On dit que f a une propriété P au *voisinage* de $+\infty$ si $+\infty$ est adhérent à Dom f et si il existe $A > 0$ tel que que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [A, +\infty[$. On a la définition analogue en $-\infty$.

Avec cette notion de propriété au voisinage, on a les analogues suivants de théorèmes déjà démontrés pour les suites. Les démonstrations découlent très facilement de la caractérisation de la convergence par les suites (Proposition 3.4.1).

Théorème 3.4.3 *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si f est croissante au voisinage de a alors f est convergente en a. En particulier :*
– Si f est croissante majorée au voisinage à gauche de a, alors f admet une limite finie à gauche en a.
– Si f est croissante non majorée au voisinage à gauche de a, alors f tend vers $+\infty$ à gauche en a.
– Si f est croissante minorée au voisinage à droite de a alors f admet une limite finie à droite en a
– Si f est croissante non minorée au voisinage à droite de a alors f tend vers $-\infty$ à droite en a.

On dispose aussi d'un critère de Cauchy pour la convergence des fonctions. Une fonction réelle f est *de Cauchy* au point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ x, y \in \mathrm{Dom}\ f\,,\ |x-a| \le \delta\,,\ |y-a| \le \delta\ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Une fonction f est *de Cauchy* en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A > 0\,;\ x, y \in \mathrm{Dom}\ f\,, x > A\,,\ y > A\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

On a la définition analogue en $-\infty$.

Théorème 3.4.4 *Une fonction réelle f admet une limite finie en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si et seulement si elle est de Cauchy en a.*

Démonstration Faisons en détail le cas où $a \in \mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés au lecteur. Si f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ au point a alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{Dom}\ f$ tel que $|x-a| \le \delta$ on ait $|f(x) - l| \le \varepsilon/2$. En particulier, si $x, y \in \mathrm{Dom}\ f$ sont tels que $|x-a| \le \delta$ et $|y-a| \le \delta$ on a

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - l| + |f(y) - l| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Ce qui prouve que f est de Cauchy en a.

Inversement, si f est de Cauchy en a, alors comme a est adhérent à Dom f, prenons une suite (x_n) dans Dom f qui tend vers a. Le critère de Cauchy pour la fonction f dit

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ x, y \in \mathrm{Dom}\ f\,,\ |x-a| \le \delta\,,\ |y-a| \le \delta\ \Longrightarrow \\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Soit maintenant $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait $|x_n - a| \leq \delta$. On a donc, pour tout $m, n \geq n_0$ l'inégalité $|f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon$. En fait on a prouvé que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy. Elle admet donc une limite finie l (Théorème 2.8.2). Il reste à prouver que cette limite l est aussi la limite de f.

Comme on a

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - l|$$

on majore le premier terme à droite par $\varepsilon/2$ grâce au critère de Cauchy et le deuxième terme par $\varepsilon/2$ grâce à la convergence. On montre ainsi facilement la convergence voulue. $\square$

3.5 Continuité

Une fonction f est *continue* en un point $a \in \mathrm{Dom}\, f$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Si f est continue en tout point a d'un ensemble $A \subset \mathrm{Dom}\, f$, on dit que f est *continue sur* A.

Si $a \notin \mathrm{Dom}\, f$ est un point adhérent de $\mathrm{Dom}\, f$, on dit que f se *prolonge par continuité* en a si $l = \lim_{x \to a} f(x)$ existe et est finie. Dans ce cas, on prolonge f en posant $f(a) = l$, qui devient du coup continue en a.

Par exemple, $x \mapsto f(x) = \sin(x)/x$ est fonction définie seulement sur $\mathbb{R}^*$. Mais on peut montrer que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Donc f trouve un prolongement naturel en posant $f(0) = 1$, ce qui en fait une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$.

Le théorème qui suit rassemble les opérations usuelles sur les fonctions qui préservent la propriété de continuité. C'est un théorème maintenant facile (nous laissons la preuve au lecteur) mais néanmoins très important, puisque c'est celui qui justifie la continuité de la plupart des fonctions.

Théorème 3.5.1 *Soient f et g deux fonctions réelles.*

1) Si f et g sont continues au point x alors $f + g$ et fg sont continues au point x. Il en va de même pour f/g à condition que $g(x) \neq 0$.

2) Si f est continue en x et si g est continue en $f(x)$ alors $g \circ f$ est continue en x.

Corollaire 3.5.2 *Soit f une fonction réelle. Si (u_n) est une suite dans* $\mathrm{Dom}\, f$ *qui converge vers $l \in \mathrm{Dom}\, f$ et si f est continue en l, alors* $\lim f(u_n) = f(l)$.

Quelques exemples des fonctions continues, avec les preuves.

1) Toutes les fonctions puissances sont continues sur leur domaine de définition. En effet, pour les puissances entières on a, pour tout $x, h \in \mathbb{R}$

$$(x+h)^n = x^n + h \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{n} h^{i-1} x^{n-i} \,.$$

Le dernier terme à droite tend vers 0 quand h tend vers 0, donc $\lim_{h\to 0}(x+h)^n = x^n$. On a prouvé la continuité de $x \mapsto x^n$ sur tout $\mathbb{R}$.

Maintenant, par le Théorème 3.5.1, on voit facilement que

– Toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,

– Toutes les fonctions quotients de polynômes sont continues en tout point où le dénominateur ne s'annule pas. Ca vaut en particulier pour les fonctions $1/x^n$.

Passons aux racines n-ièmes. On prend $x \geq 0$ fixé et on considère d'abord $h > 0$. Comme on a

$$\left(x^{1/n} + h^{1/n}\right)^n = x + h + T$$

avec $T > 0$, on en déduit que

$$\left(x^{1/n} + h^{1/n}\right)^n \geq x + h$$

et donc

$$x^{1/n} + h^{1/n} \geq (x+h)^{1/n}$$

(la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante, on l'a déjà vu). Donc finalement

$$(x+h)^{1/n} - x^{1/n} \leq h^{1/n} \,.$$

Prenons maintenant $x > 0$ et $h < 0$ de telle sorte que $x + h \geq 0$. On va trouver de la même manière

$$x^{1/n} - (x+h)^{1/n} \leq (-h)^{1/n} \,.$$

L'un dans l'autre on a montré que, dans tous les cas, on a

$$\left|(x+h)^{1/n} - x^{1/n}\right| \leq |h|^{1/n} \,.$$

Ca prouve bien la convergence vers 0 de $(x+h)^{1/n} - x^{1/n}$ quand h tend vers 0. Donc les fonctions racines n-ièmes sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

En appliquant le Théorème 3.5.1 pour la composition des fonctions, on voit que toutes les fonctions puissances rationnelles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prenons d'autres fonctions très classiques. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ car

$$||x+h|-|x|| \leq |h|$$

comme on peut le vérifier assez facilement (faire 4 cas).

On peut aussi démontrer facilement la continuité de cos et sin sur $\mathbb{R}$. En effet, on a $|\sin h| \leq |h|$ pour tout h, comme on peut le vérifier directement sur le cercle trigonométrique. Donc sin est continue en 0. Ensuite comme $\cos h = \sqrt{1-\sin^2 h}$ pour $-\pi/2 \leq h \leq \pi/2$, on voit que cos est aussi continu en 0. Finalement, avec les formules

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

et

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

on a facilement la continuité de cos et sin en tout point. La continuité de tan en découle par quotient, en tout point où cos ne s'annule pas.

Nous passons maintenant à la fonction exp. Soit $u_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. La suite $\exp(u_n)$ est décroissante (car exp est croissante) et minorée par 1. Donc elle converge vers une limite $l \geq 1$. Comme on a

$$\exp(u_n) = \exp(u_{n+1})^2$$

pour tout n, alors la limite l vérifie $l = l^2$ (en passant à la limite sur les deux suite ci-dessus). Donc $l = 1$. Avec un raisonnement analogue, on voit facilement que $\lim \exp(-1/2^n) = 1$.

Soit maintenant (v_n) une suite qui tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons N_0 tel que

$$\begin{cases} \exp(1/2^{N_0}) - 1 \leq \varepsilon \\ 1 - \exp(-1/2^{N_0}) \leq \varepsilon \,. \end{cases}$$

Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|v_n| \leq 1/2^{N_0}$, i.e.

$$-\frac{1}{2^{N_0}} \leq v_n \leq \frac{1}{2^{N_0}}$$

et donc

$$\exp(-\frac{1}{2^{N_0}}) \leq \exp(v_n) \leq \exp(\frac{1}{2^{N_0}}) \,.$$

Ce qui donne finalement

$$1 - \varepsilon \leq \exp(v_n) \leq 1 + \varepsilon \,.$$

On a montré que $\lim \exp(v_n) = 1$. Cela prouve la continuité de exp en 0. La continuité de exp sur $\mathbb{R}$ vient alors facilement de l'identité

$$\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)\,.$$

Pour la continuité de ln on y arrive soit par une méthode analogue à celle de exp, à la main, en commençant par les suites $\ln(2^{\pm 1/2^n})$ et la relation $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ etc. Soit en utilisant un théorème de continuité des fonctions réciproques, que nous allons montrer plus loin.

3.6 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section nous allons montrer deux des théorèmes les plus importants concernant les fonctions continues (à savoir absolument).

Théorème 3.6.1 *Si f est une fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ alors f atteint son* max *et son* min *sur cet intervalle. Autrement dit, il existe $c_-, c_+ \in [a, b]$ tel que $f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration Nous faisons toute la démonstration en détail pour le max. Le cas du min en découlera facilement en remplaçant f par $-f$.

Tout d'abord, nous montrons que f est majorée sur $[a, b]$. En effet si f est non majorée sur $[a, b]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. En particulier la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. Mais la suite (x_n) est bornée, elle admet donc une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass), disons (x_{n_k}) convergeant vers l. Comme la suite (x_{n_k}) est dans $[a, b]$, sa limite l aussi. Comme f est continue au point l on doit avoir $\lim f(x_{n_k}) = f(l)$. Ce qui contredit le fait que $\lim f(x_{n_k}) = +\infty$. Donc f est majorée sur $[a, b]$.

L'image de $[a, b]$ par f est un ensemble non vide et majoré, elle admet donc un sup, noté M. D'après la caractérisation du sup on sait qu'il existe une suite dans $f([a, b])$ qui converge vers M. Autrement dit il existe une suite (u_n) dans $[a, b]$ telle que $\lim f(u_n) = M$. On fait alors le même raisonnement, cette suite (u_n) bornée admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite notée $c_+ \in [a, b]$. Par continuité de f au point c_+ on a $f(c_+) = \lim f(u_{n_k}) = M$. $\square$

Théorème 3.6.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Autrement dit, si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors quelque soient $a, b \in I$ avec $f(a) \neq f(b)$, quelque soit v entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c entre a et b tel que $f(c) = v$.*

Démonstration On peut très bien supposer que $a < b$ et $f(a) < f(b)$ pour fixer les idées ; les autres cas se démontrent exactement de la même façon.

Soit $v \in]f(a), f(b)[$. Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b[\,;\ f(x) < v\}\,.$$

Cet ensemble est non vide car il contient a et majoré par b. Donc il admet un sup noté c. Comme ce nombre c est limite d'une suite d'éléments de A et que f est continue en c on a $f(c) \leq v$. Nous voulons prouver que $f(c) = v$ ce qui démontrerait le théorème.

Supposons par l'absurde que $f(c) < v$. Posons $\varepsilon = (v - f(c))/2$. Par continuité de f au point c on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [c, c + \delta[$ alors $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. En particulier cela donne $f(x) \leq (v + f(c))/2 < v$. Donc tous les points de $[c, c+\delta[$ sont encore dans A. Ce qui contredit le fait que c est un majorant de A. On a donc montré que $f(c) = v$.

Notez que comme $f(c) \neq f(a)$ et $f(c) \neq f(b)$ on a forcement $c \neq a$ et $c \neq b$. □

Corollaire 3.6.3 *L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.*

Démonstration En effet, par le Théorème précédent, l'image est un intervalle. Par le Théorème 3.6.1, la fonction f atteint un max et un min dans l'intervalle, donc l'image est un intervalle fermé $[f(c-), f(c+)]$. □

3.7 Monotonie et continuité

Proposition 3.7.1 *Une fonction injective et continue sur un intervalle I est forcément strictement monotone.*

Démonstration Prenons 3 points $x_1 < x_2 < x_3$ de I. Supposons que $f(x_1) < f(x_3)$ (si c'est le contraire, on inverse facilement le raisonnement). Alors nous allons montrer que forcément $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. En effet, si par exemple $f(x_2) < f(x_1)$ (on ne peut pas avoir $f(x_2) = f(x_1)$ à cause de l'injectivité), d'après le Théorème des valeurs intermédiaires f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[f(x_2), f(x_3)]$ dans l'intervalle $[x_2, x_3]$. Donc en particulier f repasse par la valeur $f(x_1)$, ce qui contredit l'injectivité. Si on a plutôt $f(x_2) > f(x_3)$ on fait un raisonnement analogue.

On a montré que f est strictement monotone sur tout triplet de points de I. Cela s'étend facilement à tout quadruplet $\{a, b, c, d\}$, en regardant les deux triplets $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, d\}$.

Maintenant prenons $\alpha < \beta$ quelconques dans I. Supposons que $f(\alpha) < f(\beta)$. Soient $x < y$ quelconques dans I, différents de α, β. Alors, en appliquant la monotonie stricte de f sur le quadruplet $\{\alpha, \beta, x, y\}$ on trouve $f(x) < f(y)$. On a prouvé que f est strictement croissante. Si on avait supposé $f(\alpha) > f(\beta)$ on aurait trouvé f strictement décroissante. $\square$

Théorème 3.7.2 *Toute fonction f strictement croissante sur un intervalle $]a, b[$ admet des limites à gauche et à droite en tout point de cet intervalle. Ces limites sont*

$$f(x-) = \lim_{t \to x-} f(t) = \sup\{f(t)\,;\ t < x\}$$

et

$$f(x+) = \lim_{t \to x+} f(t) = \inf\{f(t)\,;\ t > x\}\,.$$

L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Démonstration Soit $x_0 \in]a, b[$ fixé. La fonction f est croissante au voisinage de x_0, donc en particulier au voisinage à gauche et elle est majorée par $f(x_0)$, donc elle converge à gauche. On raisonne de même à droite.

Soit maintenant E l'ensemble des points de discontinuité de f, qui est strictement croissante. Pour chaque $x \in E$ la fonction f a une limite à gauche $f(x-)$ et une limite à droite $f(x+)$ qui vérifient par hypothèse $f(x-) < f(x+)$. Soit $q(x)$ un rationnel tel que $f(x-) < q(x) < f(x+)$. Notez que si $x_1 < x_2$ sont deux éléments de E alors $f(x_{1+}) \leq f(x_{2-})$ et donc $q(x_1) < q(x_2)$. L'application $q\ :\ E \to \mathbb{Q}$ est donc injective. Elle est bijective sur son image qui est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Donc E est au plus dénombrable. $\square$

Proposition 3.7.3 *Une fonction strictement monotone sur un intervalle I est continue si et seulement si son image est un intervalle.*

Démonstration On a déjà démontré un sens : si f est continue, l'image de I est un intervalle.

Inversement, si f est, par exemple, strictement croissante et si f avait un point de discontinuité x, on aurait $f(x-) < f(x_+)$. Mais comme $f(x-) = \sup\{f(t)\,;\ t < x\}$ on a $f(t) \leq f(x-)$ pour tout $t < x$. De même on $f(t) \geq f(x+)$ pour tout $t > x$.

Donc dans l'image de f il y a au plus un point dans l'intervalle $]f(x-), f(x+)[$, c'est $f(x)$. Quoi qu'il en soit l'image de f n'est pas un intervalle. $\square$

Théorème 3.7.4 *Soit f une fonction continue injective sur un intervalle I. Soit $J = f(I)$, alors f est bijective de I dans J et sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur J.*

Démonstration Il est clair que f est surjective dans J, par définition de J. Donc f est bijective est admet une fonction réciproque f^{-1} bijective de J dans I.

Comme f est injective et continue, elle est strictement monotone. Donc f^{-1} aussi (exercice). Finalement f^{-1} est strictement monotone, son image est un intervalle, donc f^{-1} est continue. □

3.8 Retour sur exp, ln et puissances

Je ne rappelle pas ici les définitions et les propriétés bien connues des fonctions $\exp\ :\ x \mapsto e^x$ et $\ln(x)$. Par contre je veux revenir sur certaines propriétés en lien avec les fonctions puissances.

Rappelons que pour $n \in \mathbb{Z}$ et pour $x > 0$ on a

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

et donc

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = e^{n \ln(x)}\,.$$

Dans le cas des puissances rationnelles cela marche de la même façon. En effet, si $x > 0$ et $y = x^{1/n}$ on a $x = y^n$ et donc $\ln(x) = n \ln(y)$ ou encore

$$y = \frac{1}{n}\,\ln(x)\,.$$

Ce qui donne finalement

$$x^{1/n} = \exp(\ln(x^{1/n})) = e^{\frac{1}{n}\,\ln(x)}\,.$$

Enfin, si $q = a/b$ est rationnel, on a

$$x^q = (x^{1/b})^a$$

et donc

$$x^q = e^{q\,\ln(x)}\,.$$

C'est cette formule que l'on retient pour définir les puissances quelconques. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x^\alpha = e^{\alpha\,\ln(x)}\,.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} x^0 &= x\,,\\ 1^\alpha &= 1\,,\\ x^a\,y^a &= (xy)^a\,,\\ x^a\,x^\beta &= x^{\alpha+\beta}\,,\\ (x^a)^\beta &= x^{\alpha\beta}\,. \end{aligned}$$

3.9 Comparaison de fonctions

Dans la suite D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, adhérent à $D \setminus \{a\}$. Les fonctions dont on parle sont toutes définies sur D.

On dit qu'une fonction f est *négligeable* devant une fonction g au voisinage de a, s'il existe une fonction ε sur D, telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)\,.$$

On écrit alors que $f = o(g)$ *au voisinage de a.*

Par exemple $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0, puisque $x^3 = x \times x^2$ et que $\varepsilon(x) = x$ tend vers 0 en 0. Ou encore $x^2 = o(x^5)$ au voisinage de $+\infty$, puisque $x^2 = x^5 \times 1/x^3$ etc.

Théorème 3.9.1 *Quelques soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ on a*

$$(\ln(x))^\alpha = o\left(x^\beta\right) \qquad \text{et} \qquad x^\beta = o\left(e^{\gamma x}\right)\,,$$

au voisinage de $+\infty$ et on a

$$|\ln(x)|^\alpha = o\left(x^{-\beta}\right)$$

au voisinage de 0.

Démonstration Nous allons commencer par démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

Soit $x > 0$ et $p = E[x]$, on a

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^p}{p+1} \geq \frac{2^p}{p+1}\,.$$

Mais on peut facilement démontrer par récurrence que pour $n \geq 5$ on a

$$\frac{2^n}{n+1} \geq n\,.$$

En effet

$$\frac{2^{n+1}}{n+2} = \frac{2^n}{n+1}\,\frac{2(n+1)}{n+2} \geq \frac{2n(n+1)}{n+2}$$

qui est plus grand que $n+1$ dès que $n \geq 2$. Cela démontre la convergence annoncée.

En particulier, en élevant à la puissance β, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\beta} = +\infty\,,$$

pour tout $\beta > 0$. Maintenant, pour tout $\beta, \gamma > 0$ on a

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = \frac{e^{\beta\,\frac{\gamma x}{\beta}}}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma x}{\beta}\right)^\beta}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors $y = \gamma x/\beta$ tend vers $+\infty$ aussi et donc

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = C\,\frac{e^{\beta y}}{y^\beta}$$

tend vers $+\infty$.

Nous avons ainsi démontré que $\lim_{x\to+\infty} x^\beta/e^{\gamma x} = 0$ ce qui prouve que $x^\beta = o(e^{\gamma x})$.

Regardons maintenant

$$\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta}\,.$$

Si on pose $y = \ln(x)$ la quantité ci-dessus s'écrit

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors y aussi et donc $y^\alpha/e^{\beta y}$ tend vers 0. Ce qui prouve la relation voulue en $+\infty$.

Enfin, regardons au voisinage de 0, la limite de $|\ln(x)|^\alpha/x^{-\beta}$. Posons $y = 1/x$, la quantité ci-dessus vaut $|\ln y|^\alpha/y^\beta$. Quand x tend vers 0 alors y tend vers $+\infty$ et la quantité ci-dessus tend vers 0. □

Proposition 3.9.2

1) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ et si $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

2) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1f_2 = o(g_1g_2)$.

3) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$.

4) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ alors $1/g = o(1/f)$.

Toutes les démonstrations des résultats ci-dessus sont évidentes et laissées au lecteur. Par contre, notez bien qu'il ne faut pas faire les erreurs suivantes.

– Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors il n'est pas vrai que $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$. En effet, on a au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$ et $-x^3 = o(-x + x^2)$ mais par contre $x^2 - x^3$ n'est pas un $o(x^2)$.

– Avec les quotients de fonctions rien de général ne marche.

Notez qu'avec nos notations on écrit $f = o(1)$ au voisinage de a pour dire f tend vers 0 en a.

3.10 Equivalence de fonctions

On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

On note cela $f \sim_a g$, ou bien $f \sim g$ au voisinage de a. Notez que c'est équivalent à $f = g + o(g)$ au voisinage de a.

Théorème 3.10.1

1) La relation $\sim$ au voisinage de a est une relation d'équivalence entre fonctions : elle est symétrique, réflexive et transitive.

2) Si $f \sim_a g$ alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe. Dans ce cas les limites sont égales.

3) On peut prendre le produit, le quotient (si bien défini) et les puissances des équivalents.

4) Si $\lim_{x\to b} \phi(x) = a$ et si $f \sim_a g$ alors $f \circ \phi \sim_b g \circ \phi$.

Démonstration

1) Le fait que $f \sim_a f$ est une évidence.

Si $f \sim_a g$ alors $f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$ où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Mais dans ce cas, en posant

$$\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}$$

on a $\lim_{x\to a} \varepsilon'(x) = 0$ et $g(x) = (1-\varepsilon'(x))f(x)$. Ainsi $g \sim_a f$.

Enfin, si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f = (1+\varepsilon)g$ et $g = (1+\varepsilon')h$ d'où $f = (1+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon\varepsilon')h$ ce qui donne le résultat facilement.

2) On a $g(x) = (1+\varepsilon(x))f(x)$ donc $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

4) On a $f(\phi(x)) = (1+\varepsilon(\phi(x)))g(\phi(x))$, mais $\lim_{x\to b} \varepsilon(\phi(x)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

3) Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors

$$\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x) &= (1+\varepsilon_1(x))(1+\varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x) \\
&= (1+\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)+\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x)\,. \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)}\,\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \\
&= (1+\varepsilon_1(x))(1-\varepsilon_2'(x))\,\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,.
\end{aligned}$$

On passe facilement aux puissances $n \in \mathbb{Z}$ en itérant le résultat ci-dessus, du coup on passe aux puissances rationnelles (si les fonctions sont > 0). Pour les puissances quelconques, si f et g sont > 0 et $f \sim_a g$ alors

$$f(x)^\alpha = e^{\alpha \ln(f(x))} = e^{\alpha \ln((1+\varepsilon(x))g(x))} = e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))} e^{\alpha \ln(g(x))}\,.$$

La limite de $e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))}$ quand $x \to a$ est clairement 1, d'où le résultat. □

Les erreurs à ne pas faire avec les équivalents :

– En général on ne peut pas additionner (ou soustraire) des équivalents. Par exemple $x^2 - x \sim_0 -x$ et $x \sim_0 x$, par contre $x^2 \not\sim_0 0$.

– On ne peut pas composer les équivalents par une fonction *à gauche*. Par exemple $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$, mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

et donc $e^{x^2+x} \not\sim_{+\infty} e^{x^2}$.

Théorème 3.10.2 (Equivalents importants en 0)
$e^x \sim 1 + x$
$\ln(1+x) \sim x$
$\sin(x) \sim x$
$\cos(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2}$
$\tan(x) \sim x\,.$

Non démontré pour le moment.

3.11 Dérivabilité

Soit f une fonction réelle et $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que a soit aussi adhérent à $\mathrm{Dom}\, f \setminus \{a\}$. On dit que f est *dérivable* en a si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(a)$, la *dérivée* de f au point a. Souvent on écrit la condition ci-dessus plutôt sous la forme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(a)\,.$$

De la même façon on définit les fonctions *dérivables à gauche* en a, *dérivables à droite* en a. On parle alors de *dérivée à gauche* et de *dérivée à droite*, parfois notées $f'(a-)$, $f'(a+)$.

Si f est dérivable en tout point d'un ensemble I (souvent un intervalle), on dit que f est *dérivable sur I*. Dans ce cas, on peut considérer la fonction

$$\begin{array}{rccc} f' & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f'(x)\,. \end{array}$$

C'est la *fonction dérivée* de f sur I.

Une remarque extrêmement importante. Si f est dérivable au point a cela veut dire que si l'on pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Ou encore

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\,,$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Ce qui veut dire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

au voisinage de 0, ou encore

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x)$$

au voisinage de a.

Comment doit-on comprendre une telle relation ? Elle veut dire que près de a la fonction f est presque affine ($f(a+h) = f(a)+hf'(a)$) et qu'en disant ça on commet une erreur $h\varepsilon(h)$ c'est à dire bien plus petite que h (surtout quand h est petit). Le plus souvent d'ailleurs $\varepsilon(h)$ est de l'ordre de h

Notez que l'inverse est vrai, si

$$f(a+h) = f(a) + h\gamma + o(h)$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est égale à γ. Ce qui veut dire que f est dérivable en a et que $f'(a) = \gamma$.

Proposition 3.11.1 *Une fonction f dérivable en a est forcement continue en a.*

Démonstration En effet $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ donc $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. □

Théorème 3.11.2 *Si f et g sont dérivables au point a alors $f+g$ et fg le sont aussi avec*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad et \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Démonstration Pour l'addition c'est facile

$$\frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\,.$$

Pour le produit, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= (f(a) + hf'(a) + o(h))(g(a) + hg'(a) + o(h)) \\ &= f(a)g(a) + h\,(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) + \\ &\quad + \big(o(h)h(f'(a) + g'(a)) + h^2 f'(a)g'(a) + o(h)o(h)\big) \\ &= f(a)g(a) + h\,(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) + o(h)\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Voyons enfin la dérivée de $1/g$. Notez d'abord que

$$\frac{1}{1+h\gamma} = 1 - h\gamma + \frac{h^2\gamma^2}{1+h\gamma} = 1 - h\gamma + o(h)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(a+h)} &= \frac{1}{g(a) + hg'(a) + o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\,\frac{1}{1 + h\frac{g'(a)}{g(a)} + o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(1 - h\frac{g'(a)}{g(a)} + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{g(a)} - h\frac{g'(a)}{g(a)^2} + o(h)\,. \end{aligned}$$

Cela prouve que $1/g$ est dérivable en a, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

La formule pour $(f/g)'$ découle alors facilement par

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

□

Théorème 3.11.3

1) Si g est dérivable au point a et si f est dérivable au point $b = g(a)$ alors $f \circ g$ est dérivable au point a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))\,.$$

2) Si f est bijective, continue et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Démonstration

1) On sait que $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + o(h)$ et que $f(b+h) = f(b) + hf'(b) + o(h)$. En particulier

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) &= f(b + hg'(a) + h\varepsilon(h)) \\ &= f(b) + (hg'(a) + h\varepsilon(h))f'(b) + o(h) \\ &= f(g(a)) + hg'(a)f'(b) + o(h)\,. \end{aligned}$$

2) Posons $b = f(a)$, de sorte que $f^{-1}(b) = a$. Comme f^{-1} est continue (Théorème 3.7.4) on a $f^{-1}(b+h) = f^{-1}(b) + \gamma(h)$ où $\lim_{h\to 0}\gamma(h) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} &= \frac{a + \gamma(h) - a}{f(a+\gamma(h)) - f(a)} \\ &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(h)f'(a) + \gamma(h)\varepsilon(\gamma(h))} \\ &= \frac{1}{f'(a) + \varepsilon(\gamma(h))}\,. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0 alors $\gamma(h)$ tend vers 0 et $\varepsilon(\gamma(h))$ aussi. Donc la limite de l'expression ci-dessus est

$$\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

□

3.12 Fonctions usuelles

Voyons à la main la dérivabilité et la dérivée des fonctions usuelles.

La fonction $f(x) = x^n$. On a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{nhx^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{n} h^{k-2} x^{n-k}}{h} \\ &= nx^{n-1} + o(h)\,.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat bien connu que f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Pour $f(x) = x^{-n} = 1/x_n$, on utilise le théorème général pour $1/g$ et on voit que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\,.$$

Regardons la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}^+$. C'est la fonction réciproque de $f : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc elle est dérivable, de dérivée

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}\,.$$

Pour les puissances rationnelles on utilise la composition des fonctions : $x^q = (x^{1/b})^a = f \circ g$. Donc elle est dérivable (sur $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) = g'(x)\, f'(g(x)) &= \left(\frac{1}{b}\, x^{1/b-1}\right) a(x^{1/b})^{a-1} \\ &= \frac{a}{b}\, x^{a/b-1} = qx^{q-1}\,.\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, on a toujours trouvé la même formule : $(x^q)' = qx^{q-1}$.

On va s'attaquer aux dérivées de sin, cos et tan. On va commencer par le résultat clef :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\,.$$

Dans le cercle trigonométrique on regarde le secteur d'angle h petit (i.e. $\in]-\pi/2, \pi/2[$). La surface du tringle intérieur est inférieure à la surface du secteur angulaire, qui est inférieure à la surface du triangle extérieur :

$$\frac{1}{2}\cos(h)\sin(h) \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan(h)}{2}\,.$$

Ce qui donne

$$\cos(h) \leq \frac{sin(h)}{h} \leq \frac{1}{\cos(h)}\,.$$

Quand h tend vers 0, les deux membres qui encadrent tendent vers 1, d'où le résultat.

En particulier ce résultat montre que sin est dérivable en 0, de dérivée 1. Ou encore

$$\sin(h) = h + o(h)\,.$$

Comme $\cos(h) = \sqrt{1-\sin(h)^2}$, pour $h > 0$ petit, on a

$$\cos(h) = \sqrt{1 - h^2 + o(h^2)}\,.$$

Mais la dérivée de $\sqrt{x}$ au point 1 est $1/2$, donc

$$\sqrt{1 - h^2 + o(h^2)} = 1 + \frac{1}{2}(-h^2 + o(h^2)) + \varepsilon(h)(-h^2 + o(h^2)) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\,.$$

En particulier

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0\,.$$

On peut maintenant revenir à $\sin(x)$. On

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\sin(h) + \cos(h)\sin(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \cos(x)\,\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\,\frac{\cos(h) - 1}{h}\,.\end{aligned}$$

La limite quand h tend vers 0 est donc ici $\cos(x)$. On a montré que $\sin'(x) = \cos(x)$.

De la même façon

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\,\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h}\,.\end{aligned}$$

La limite quand h tend vers 0 est ici $-\sin(x)$. On a montré que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pour $\tan(x)$ on utilise la dérivée de quotient (seulement pour les points où cos ne s'annule pas !) :

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,.$$

Pour les fonctions log et exp la dérivabilité fait en fait partie de la définition. En particulier $\log(x)$ est défini par

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad \log(1) = 0\,.$$

Du coup $\exp(x)$ étant la fonction réciproque, on a

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp(x))} = \exp(x)\,.$$

Du coup on peut regarder la dérivée des fonctions puissances réelles. Soit $r \in \mathbb{R}$ alors sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie la fonction

$$x^r = \exp(r\log(x))\,.$$

Elle est donc dérivable, de dérivée

$$\frac{r}{x}\exp(r\log(x)) = rx^{r-1}\,.$$

Faites bien attention à une chose. Si a est un réel > 0 alors la fonction

$$x \mapsto a^x$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$, elle est en fait égale à $e^{x\log(a)}$. Elle est dérivable, mais sa dérivée n'est certainement pas $x\,a^{x-1}$! C'est en fait $\log(a)e^{x\log(a)}$, c'est à dire $\log(a)a^x$.

3.13 Théorèmes fondamentaux de la dérivation

Proposition 3.13.1 *Si f est dérivable et croissante sur I alors sa dérivée est positive sur I.*

Démonstration En effet, si $h > 0$ alors
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
et si $h < 0$ alors
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0\,.$$
Donc en passant à la limite, l'inégalité reste. □

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ admet un *minimum local* au point $a \in D$ si il existe $\delta > 0$ tel que $|x-a| \leq \delta$ implique $f(x) \geq f(a)$. C'est à dire que sur l'intervalle $[a-\delta, a+\delta]$ la fonction f atteint un minimum au point a.

De la même façon on définit un *maximum local.* On parle d'*extremum local* pour parler indifféremment de maximum ou de minimum local.

Proposition 3.13.2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et que I est un intervalle ouvert, alors si a est un extremum local on a $f'(a) = 0$.*

Démonstration Supposons par exemple que f admette un minimum local en a. Le cas où c'est un maximum se traite de la même manière. Soit η tel que les ensembles $\{x \in I\,;\ a-\eta \leq x < a\}$ et $\{x \in I\,;\ a < x \leq a+\eta\}$ soient non vides (ce qui est toujours possible car I est ouvert). Si x est dans le premier ensemble, alors
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0\,,$$
si x est dans le second ensemble, alors
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\,.$$
Comme les deux quantités tendent vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a, alors $f'(a) = 0$. □

Théorème 3.13.3 (de Rolle) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration Si f est une fonction constante sa dérivée est toujours nulle, il n'y a rien à prouver. Supposons f non constante. Alors f admet un minimum global et un maximum global sur $[a,b]$ et ils sont de valeurs différentes. Comme $f(a) = f(b)$, au moins une des deux valeurs a ou b n'est pas un de ces extrema globaux. Ca veut dire qu'il existe $c \in]a,b[$ qui soit un extremum global de f. Donc $f'(c) = 0$. □

Attention, la réciproque est fausse : ce n'est pas parce que $f'(a) = 0$ que ça veut dire que a est un extremum local. Prenez par exemple $a = 0$ pour la fonction $x \mapsto x^3$.

Corollaire 3.13.4 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et si sa dérivée est à strictement positive alors f est strictement croissante.*

Démonstration Comme sa dérivée ne s'annule pas, f est injective (grâce au Théorème de Rolle : si f n'est pas injective, sa dérivée s'annule). Donc f étant continue, elle est strictement monotone (Proposition 3.7.1). Elle est forcément strictement croissante, sinon elle serait strictement décroissante et sa dérivée serait négative. □

Attention, la réciproque est fausse : une fonction peut très bien être strictement croissante et avoir sa dérivée qui s'annule (par exemple $f(x) = x^3$).

Théorème 3.13.5 (des accroissements finis)
1) **Egalité des accroissements finis** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

2) **Inégalité des accroissements finis** *Si de plus il existe m et M des réels tels que $m \leq f'(t) \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$, alors*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)\,.$$

En particulier, si $\sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$ est fini, alors

$$|f(a) - f(b)| \leq \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|\, (b - a)\,.$$

Démonstration
1) Posons $\gamma = (f(b) - f(a))/(b - a)$ et $g(x) = f(x) - \gamma(x - a)$ sur $[a, b]$. La fonction g est, comme f, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et elle vérifie $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. Donc par le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais comme $g'(x) = f'(x) - \gamma$, cela donne $f'(c) = \gamma$.
2) On a d'après 1) :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,,$$

mais comme $b - a$ est positif, on passe à l'inégalité sur $m \leq f'(c) \leq M$.

Enfin si $M = \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$ existe, on a donc $-M \leq f'(t) \leq M$ pout tout $t \in]a, b[$ et on conclut facilement. □

Proposition 3.13.6
1) Une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est à valeurs positives est forcement croissante.

2) Une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est toujours nulle est forcément constante.

Démonstration

1) Prenons deux valeurs $x < y$ dans I, alors par l'égalité des accroissements finis on a

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

pour un $c \in]x, y[$. Comme $f'(c)$ est positif par hypothèse, on a $f(y) \geq f(x)$. Donc f est croissante.

2) Même idée que ci-dessus, sauf que comme $f'(c) = 0$ on en déduit que $f(x) = f(y)$ pour tus x, y. □

Proposition 3.13.7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite l au point a alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Démonstration Soit (x_n) une suite dans $I \setminus \{a\}$ qui converge vers a, posons $h_n = |a - x_n|$. On sait qu'il existe $c_n \in]x_n, a[$ ou $\in]a, x_n[$, donc dans tous les cas dans $]a - h_n, a + h_n[$, tel que

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Comme h_n tend vers 0 la suite (c_n) tend vers a, par le théorème des gendarmes. Par hypothèse $f'(c_n)$ tend vers l. On a donc montré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = l$$

pour toute suite (x_n) qui tend vers a. Par la caractérisation séquentielle de la limite, cela veut dire que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Autrement dit, le résultat annoncé. □

Chapter 4

Equations différentielles

4.1 Introduction

Le but des *équations différentielles* est de résoudre des équations où les inconnues sont des fonctions (et non pas des nombres comme d'habitude), ces équations relient la fonction inconnue f à sa dérivée, éventuellement à des dérivées supérieures (f'', f''', $\cdot$) et à d'autres fonctions. Par exemple :

$$\begin{aligned} 2f''(x) - 3f'(x) + f(x) &= \cos(x)\,, \\ f'(x) + a(x)f(x) &= b(x)\,, \\ (f'(t))^2 + 2\exp(f(t)) &= cos(t)\,. \end{aligned}$$

Ces équations arrivent très naturellement dans énormément situations différentes, soit en mathématiques, soit dans des modèles en physique, en biologie, en économie.

Un exemple que vous connaissez bien sans doute, l'équation du mouvement d'un objet physique ponctuel lancé avec une vitesse initiale et soumis au champ de la pesanteur :

$$mx''(t) = -mg\,.$$

Ou encore un ressort soumis à la gravité et à la force de rappel

$$mx''(t) = -kx(t) - mg$$

ou avec frottement

$$mx''(t) = -kx(t) - vx'(t) - mg\,.$$

En toute généralité la résolution d'une équation différentielle vraiment quelconque est un problème qui peut être extrêmement difficile, parfois même du niveau de la recherche. Au cours de cette année nous verrons deux familles simples. Pour ce semestre nous ne regarderons qu'un seul type :

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

où a et b sont des fonctions fixées, données.

4.2 Equations linéaires d'ordre 1, sans second membre

L'*ordre* d'une équation différentielle est le numéro de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation. Une équation différentielle d'ordre 1 est donc une équation différentielle qui ne fait intervenir que f et f'.

Dire que l'équation est *linéaire*, c'est dire que f et f' n'apparaissent qu'avec des coefficients, mais pas sous des formes du genre $f'(t)^2$, $\cos(f'(t))$.

Le type d'équation que l'on va apprendre à résoudre est exactement celles de la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)\,. \tag{4.1}$$

Une petite question de notations : souvent ces équations apparaissent dans la littérature, écrites sous d'autres formes mais qui veulent dire exactement la même chose. Par exemple :

$$\begin{aligned}
&y'(t) + a(t)y(t) = b(t)\\
&y'(x) + a(x)y(x) = b(x)\\
&y' + a(t)y = b(t)\\
&y' + a(x)y = b(x)\\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

On commence par la forme dite *sans second membre*:

$$y'(x) = -a(x)y(x)\,. \tag{4.2}$$

On rappelle qu'une fonction A est une *primitive* de a si A est une fonction dérivable telle que $A'(x) = a(x)$ pour tout x. Les primitives de A sont unique à constante additive près, c'est à dire que toute autre primitive de a s'écrit $B(x) = A(x) + C$.

Théorème 4.2.1 *Les solutions de l'équation différentielle 4.2 sont toutes de la forme*

$$y(x) = \lambda\, \exp(-A(x)) \tag{4.3}$$

où A est une primitive de a et λ une constante réelle. La constante réelle λ est déterminée dès qu'une valeur de y est fixée en un point.

Démonstration Tout d'abord vérifions que les fonctions de la forme (4.3) sont solutions. On a

$$y'(x) = \lambda\,(-A'(x))\,\exp(-A(x)) = (-a(x))\,\lambda\,\exp(-A(x)) = -a(x)\,y(x)\,.$$

Vérifions maintenant l'unicité. Prenons y une solution quelconque et posons $z(x) = y(x)\,\exp(A(x))$. On a

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x)\,\exp(A(x)) + a(x)\,y(x)\,\exp(A(x)) \\ &= -a(x)\,y(x)\,\exp(A(x)) + a(x)\,y(x)\,\exp(A(x)) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire $z(x) = C$ et donc $y(x) = C\,\exp(-A(x))$.

Si on fixe une valeur de y, par exemple $y(x_0) = y_0$, alors ça veut dire

$$\lambda\,\exp(-A(x_0)) = y_0$$

et donc $\lambda = y_0\,\exp(A(x_0))$. □

4.3 Equations linéaires d'ordre 1, avec second membre

Nous allons maintenant apprendre à résoudre le cas général (4.2). On notera (E) l'équation générale et E_0 l'équation sans second membre.

Théorème 4.3.1 *L'ensemble des solutions de (E) est formé de toutes les fonctions y de la forme $y = z(x) + \lambda\,\exp(-A(x))$ où z est une solution quelconque de (E) et $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, là aussi, la solution est entièrement déterminée par la donnée de la valeur de y en un point.*

Démonstration Montrons d'abord qu'elles forment des solutions de (E). On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= z'(x) - a(x)\,\lambda\,\exp(-A(x)) \\ &= -a(x)z(x) + b(x) - a(x)\,\lambda\,\exp(-A(x)) \\ &= -a(x)y(x) + b(x)\,. \end{aligned}$$

Ce sont bien des solutions de (E).

Il reste à voir qu'on les a toutes comme ça. Soit y une solution quelconque de (E), considérons $v(x) = (y(x) - z(x)) \exp(A(x))$. On a

$$\begin{aligned}
v'(x) &= (y'(x) - z'(x)) \exp(A(x)) + (y(x) - z(x))\, a(x) \exp(A(x)) \\
&= (-a(x)y(x) + b(x) + a(x)z(x) - b(x)) \exp(A(x)) + \\
&\qquad + (y(x) - z(x))\, a(x) \exp(A(x)) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Donc $v(x) = C$ et on conclut facilement. □

4.4 Trouver des solutions particulières

La seule difficulté est donc maintenant d'être capable de trouver au moins une solution de (E). Il y a principalement deux méthodes.

La méthode dite de la *variation de la constante*. En fait ça veut dire qu'on cherche z sous la forme

$$z(x) = \lambda(x) \exp(-A(x))\,.$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \lambda'(x) \exp(-A(x)) - a(x)\, \lambda(x) \exp(-A(x)) \\
z'(x) + a(x)z(x) &= \lambda'(x) \exp(-A(x))\,.
\end{aligned}$$

Donc trouver une solution de cette forme c'est résoudre

$$\lambda'(x) \exp(-A(x)) = b(x)$$

ou encore

$$\lambda(x) = b(x) \exp(A(x))\,.$$

Le problème se ramène à un calcul de primitive.

Ce calcul peut-être plus ou moins difficile, voir impossible explicitement, tout dépend de la situation.

L'autre méthode consiste à deviner tout simplement une solution particulière en voyant la forme de l'équation différentielle. Par exemple à essayer des solutions ayant une certaine forme ($P(x)e^{ax}$, $P_1(x)\cos(x) + P_2(x)\sin(x)$, etc).

Faisons ensemble un exemple. Résoudre $y' + 4y = x^2 + 1$, avec $y(0) = 1$.

L'équation sans second membre $y' + 4y$ a pour solutions

$$y(x) = \lambda\, e^{-4x}\,.$$

Par variation de la constante on doit résoudre

$$\lambda'(x) = (x^2 + 1)\, e^{4x}\,.$$

On essaye $\lambda(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{4x}$. On a alors

$$\lambda'(x) = (2ax + b + 4ax^2 + 4bx + 4c)\, e^{4x}\,.$$

Ce qui donne les conditions

$$4a = 1\,,\ \ 2a + 4b = 0\,,\ \ b + 4c = 1\,.$$

C'est à dire $a = 1/4\,,\ b = -1/8\,,\ c = 9/32$.

Solution générale :

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{9}{32} + \lambda\, e^{-4x}\,.$$

Et surtout, on vérifie à la fin :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} - 4\lambda\, e^{-4x} \\ y'(x) + 4y(x) &= x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Maintenant on met la condition $y(0) = 1$, ce qui donne

$$\frac{9}{32} + \lambda = 1$$

d'où $\lambda = 23/32$ et

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{9}{32} + \frac{23}{32}\, e^{-4x}\,.$$

Chapter 5

Fonctions circulaires et hyperboliques

5.1 Fonctions circulaires réciproques

Le but de cette section est de définir et d'étudier toute une famille de fonctions très utiles, les fonctions réciproques des fonctions circulaires usuelles cos, sin, tan. Comme aucune d'entre elles n'est une bijection il faut faire attention aux domaines de définition.

5.1.1 Arccos

La fonction cos est continue, strictement décroissante de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

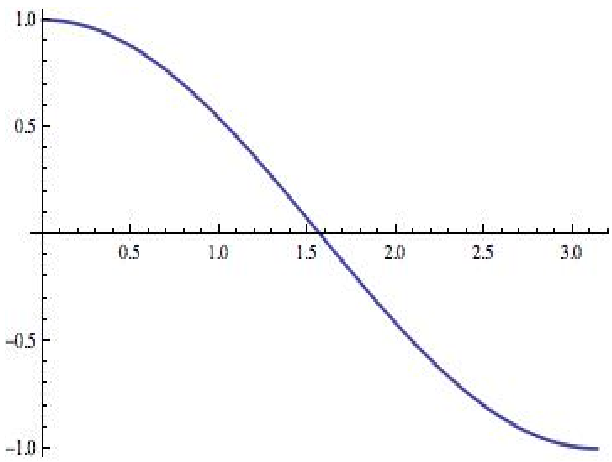

Figure 5.1: $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arccos la fonction réciproque de cos sur ces ensembles. Ainsi arccos est définie de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

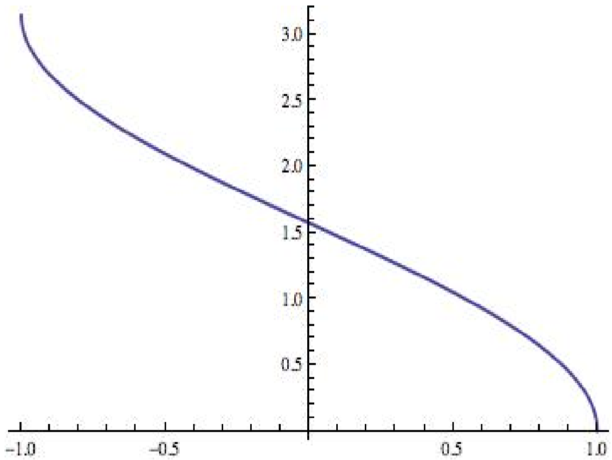

Figure 5.2: $f(x) = \arccos(x)$

Comme cos est dérivable, de dérivée $-\sin$ qui ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, alors arccos est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Mais sur cet intervalle $[0,\pi]$ on a

$$\sin(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}$$

donc

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

sur $]-1,1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

5.1.2 Arcsin

La fonction sin est continue, strictement croissante de $[-\pi/2,\pi/2]$ dans $[-1,1]$.

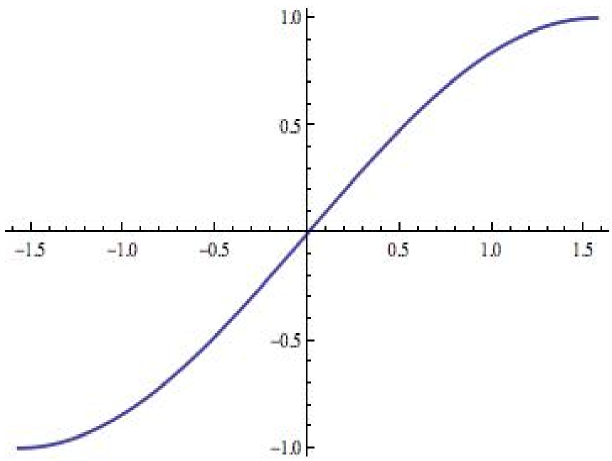

Figure 5.3: $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arcsin la fonction réciproque de sin sur ces ensembles. Ainsi arcsin est définie de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

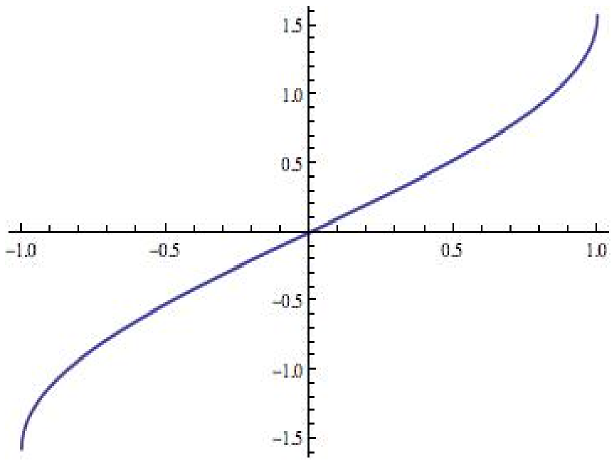

Figure 5.4: $f(x) = \arcsin(x)$

Comme sin est dérivable, de dérivée cos qui ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, alors arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\,.$$

Mais sur cet intervalle $[0, \pi]$ on a

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$$

donc

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

sur $]-1,1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

5.1.3 Arctan

La fonction tan est continue, strictement croissante de $]-\pi/2,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.

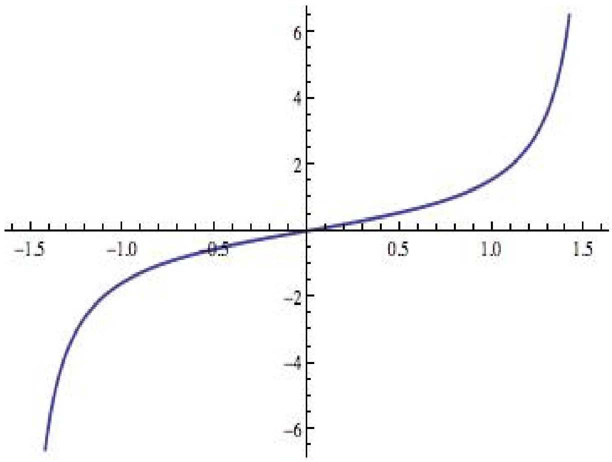

Figure 5.5: $f(x) = \tan(x)$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arctan la fonction réciproque de tan sur ces ensembles. Ainsi arctan est définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2,\pi/2[$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme tan est dérivable, de dérivée $1+\tan^2$ qui ne s'annule pas sur $]-\pi/2,\pi/2[$, alors arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

sur $\mathbb{R}$.

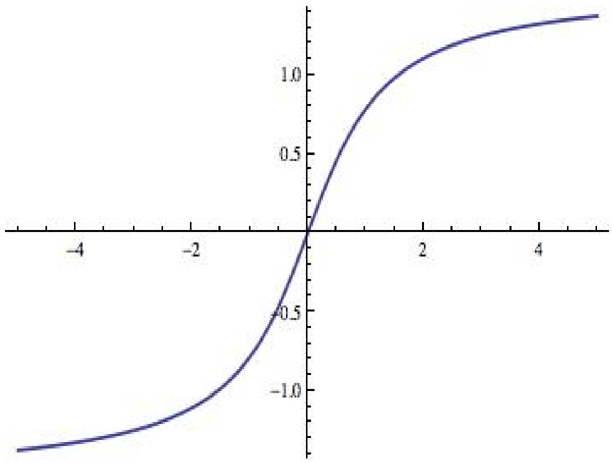

Figure 5.6: $f(x) = \arctan(x)$

5.1.4 Formules

Il faut un peu faire attention quand on utilise $\arccos(\cos(x))$ et $\cos(\arccos(x))$. En effet, $\cos(\arccos(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\cos(\arccos(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arccos renvoie toujours sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a en général

$$\arccos(\cos(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arccos(\cos(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [0, \pi]\,.}$$

De la même façon, $\sin(\arcsin(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\sin(\arcsin(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arcsin renvoie toujours sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, on a en général

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.}$$

Notez le lien suivant entre arcsin et arccos : pour tout $x \in [-1,1]$

$$\boxed{\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,.}$$

En effet, la fonction arcsin + arccos est de dérivée nulle, donc elle est constante et on calcule $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

Enfin, de la même façon que précédemment on obtient facilement

$$\boxed{\tan(\arctan(x)) = x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\boxed{\arctan(\tan(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[\,.}$$

5.2 Fonctions hyperboliques

5.2.1 Définitions

On définit sur $\mathbb{R}$ les 3 fonctions suivantes. Le *cosinus hyperbolique*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

le *sinus hyperbolique*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

et la *tangente hyperbolique*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Ce sont toutes clairement des fonctions continues. On calcule assez facilement les limites suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) &= -1 \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Elles sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ et on trouve facilement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}'(x) &= \mathrm{sh}(x) \\
\mathrm{sh}'(x) &= \mathrm{ch}(x) \\
\mathrm{th}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2 \,.
\end{aligned}$$

Voici les graphes de ces fonctions.

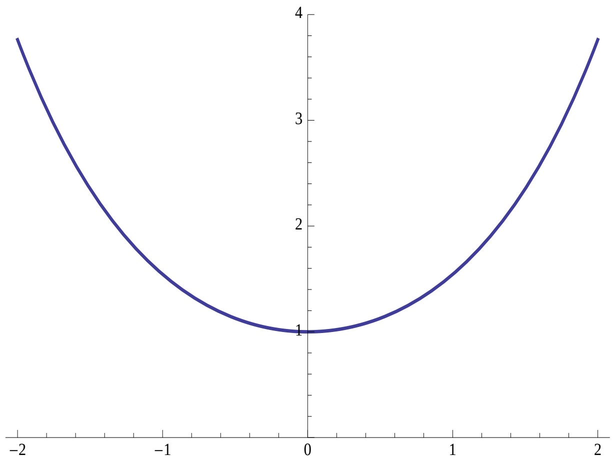

Figure 5.7: $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

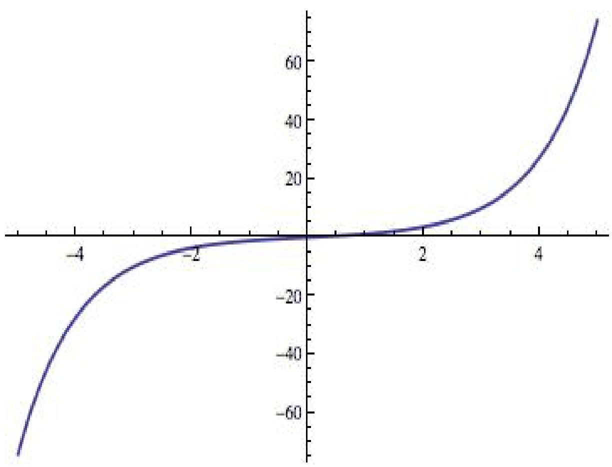

Figure 5.8: $f(x) = \mathrm{sh}(x)$

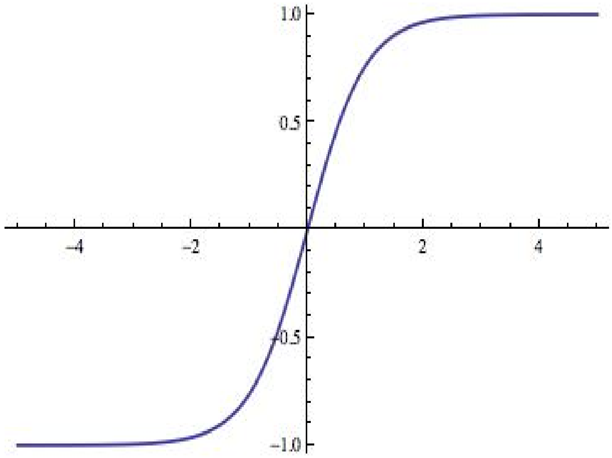

Figure 5.9: $f(x) = \mathrm{th}(x)$

5.2.2 Formules

Il y a beaucoup de formules similaires à celles des fonctions trigonométriques usuelles, avec des petite différences, souvent de signe, auxquelles il faut faire attention. Tout d'abord

$$\boxed{\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)\,, \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)\,.}$$

La formule habituelle devient

$$\boxed{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1\,.}$$

La formule de de Moivre devient triviale

$$(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)\,.$$

Les formules d'addition

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)\\
\mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)\\
\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)\\
\mathrm{sh}(x-y) &= -\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)\,.
\end{aligned}$$

5.3 Fonctions hyperboliques réciproques

5.3.1 Argch

La fonction ch est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argch la fonction réciproque de ch sur ces ensembles. Ainsi argch est définie de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

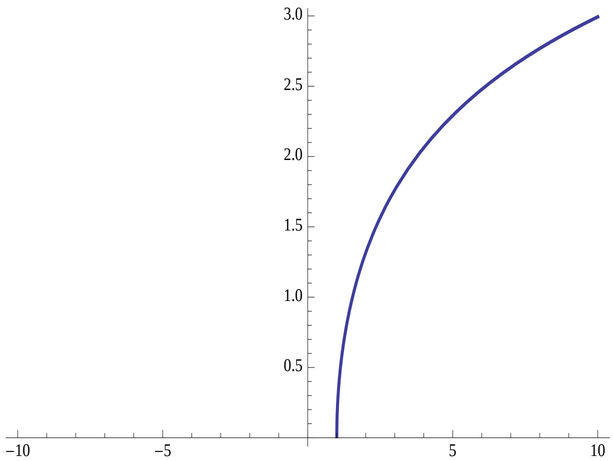

Figure 5.10: $f(x) = \text{argch}(x)$

Comme ch est dérivable, de dérivée sh qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, alors argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch}(x))} = -\frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))}.$$

Mais on a

$$\text{sh}(x) = \sqrt{\text{ch}(x)^2 - 1}$$

donc

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(\text{argch}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

sur $]1, +\infty[$. Notez qu'en 1 la pente est infinie.

5.3.2 Argsh

La fonction sh est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argsh la fonction réciproque de sh sur ces ensembles. Ainsi argsh est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

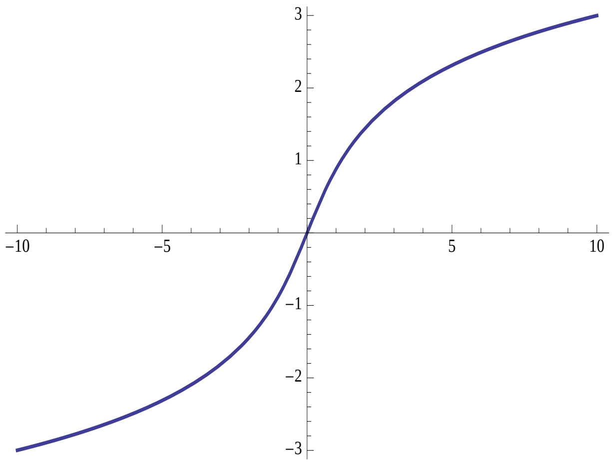

Figure 5.11: $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$

Comme sh est dérivable, de dérivée ch qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))}\,.$$

Mais on a

$$\operatorname{ch}(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}(x)^2}$$

donc

$$(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.}$$

sur $\mathbb{R}$.

5.3.3 Argth

La fonction th est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argth la fonction réciproque de th sur ces ensembles. Ainsi argth est définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme th est dérivable, de dérivée $1 - \operatorname{th}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors argth est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$(\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}\,.$$

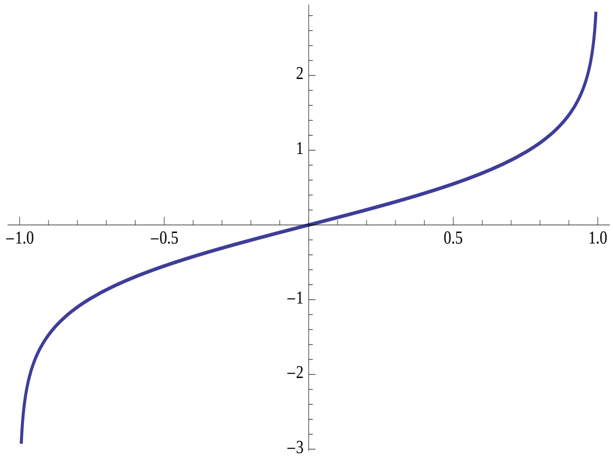

Figure 5.12: $f(x) = \operatorname{argth}(x)$

Donc à retenir

$$\boxed{(\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.}$$

sur $]-1,1[$.

5.3.4 Formules

En fait on peut trouver des formules explicites pour les fonctions argch, argsh et argth. En effet, posons $t = \operatorname{argch}(x)$, i.e. $x = \operatorname{ch}(t)$. Comme $e^t = \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)$ et $\operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1$ on a

$$e^t = x + \sqrt{x^2-1}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{argch}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.}$$

De la même façon

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})\,.}$$

Enfin

$$\operatorname{th}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

donc $\operatorname{th}(y) = x$ revient à

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\,\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,.}$$